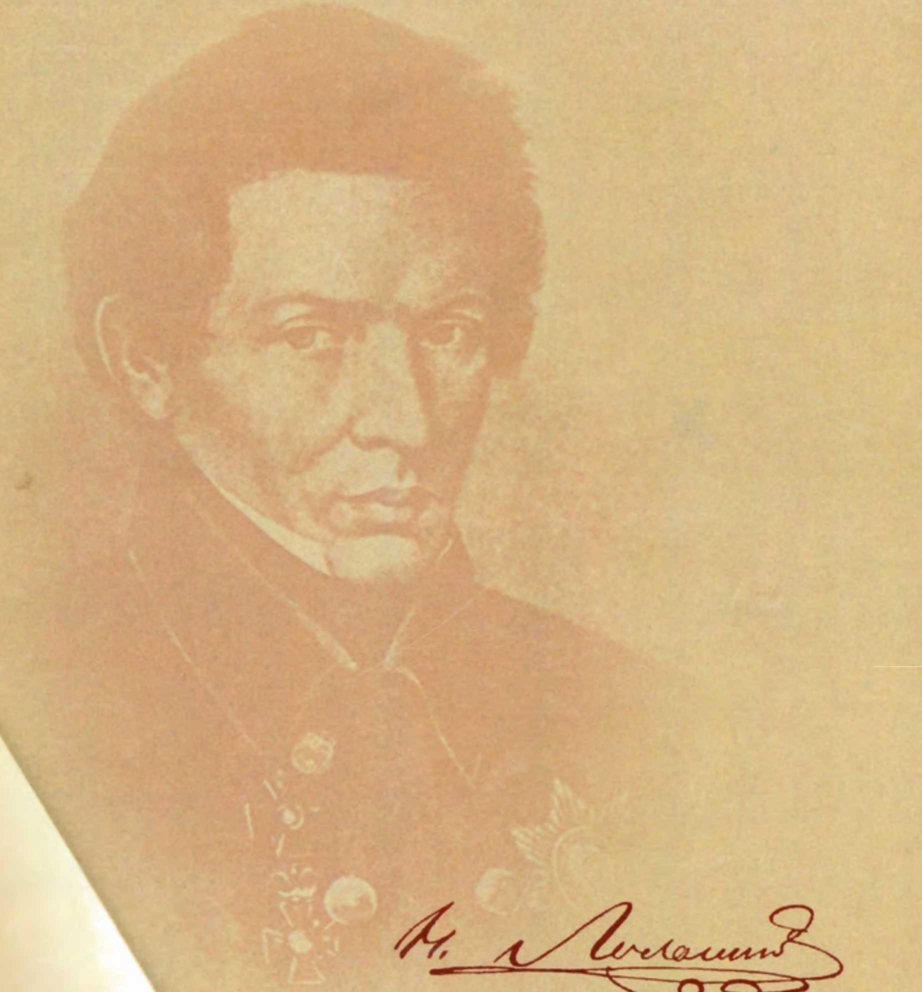
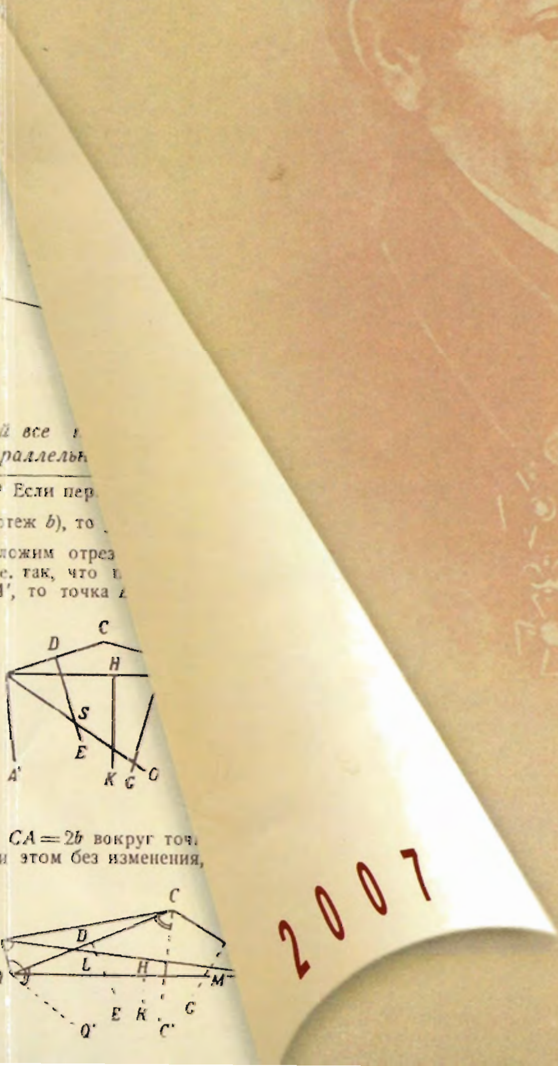
Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ





2007

На русском и греческом языках

Ν. Ι. ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ

ΔΙΑΛΕΚΤΑ ΕΡΓΑ

ΝΙΖΝΗΙ ΝΟΒΓΚΟΡΟΝΤ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ
του ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ του ΝΙΖΝΗΙ ΝΟΒΓΚΟΡΟΝΤ
«Ν.Ι. ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ»
2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее двуязычное издание избранных сочинений Н.И. Лобачевского (русский и греческий языки) является результатом совместной работы коллег-математиков из России и Греции. Оно приурочено к 150-летию со дня смерти великого математика и 90-летию Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Прошло 100 лет со дня исторического заседания Городской Думы Нижнего Новгорода, на котором Городской голова Александр Михайлович Меморский провозгласил: «Наука — единственный путь к счастью». Так он аргументировал свое предложение об основании в Нижнем Новгороде Народного университета.

В конце XIX — начале XX веков Нижний Новгород был одним из крупнейших городов России. «Карман России» — Нижний Новгород уже в то время занимал видное место в экономической жизни России и постоянно нуждался в образованных специалистах. Идея создания университета будоражила умы наиболее просвещенных горожан еще с 1896 года, когда она была впервые высказана во время открытия XVI Всероссийской Художественно-промышленной выставки. 30 января (17 января по старому стилю) 1916 года — дата рождения городского Народного университета, первого высшего учебного заведения Нижнего Новгорода, созданного по примеру Московского Народного Университета имени А.Л. Шанявского. Народный университет, не зависящий от государственной казны, был новаторским высшим учебным заведением. В отличие от «казенных», то есть государственных университетов, содержащих четыре жестко регламентированных факультета, «вольная» высшая школа могла иметь другие факультеты, принимать женщин и не имела ограничений на прием по национальным и религиозным мотивам. Отличительной особенностью «вольной» высшей школы являлось отсутствие государственных субсидий. Она существовала за счет пожертвований отдельных меценатов, организаций (общественных, купеческих, торгово-промышленных, просветительских), и платы за обучение.

Второе рождение университета в Нижнем Новгороде — в статусе государственного учреждения — датируется 28 марта 1918 года (решение Губернского исполкома). В наши дни ННГУ — один из ведущих классических университетов России. В рейтинге Министерства образования и науки РФ Нижегородский государственный университет занимает первое место среди университетов Приволжского федерального округа и входит в список 10 лучших классических университетов России.

Нижний Новгород — родина великого русского ученого-математика Николая Ивановича Лобачевского. Пятьдесят лет назад, 20 марта 1956 года, университету присвоено имя Н.И. Лобачевского.

Перевод основных сочинений Н.И. Лобачевского на язык Евклида до настоящего времени отсутствовал. Мы отобрали следующие сочинения Н.И. Лобачевского: «Геометрические исследования по теории параллельных линий»

Νικολάι Ιβάνοβιτς ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ

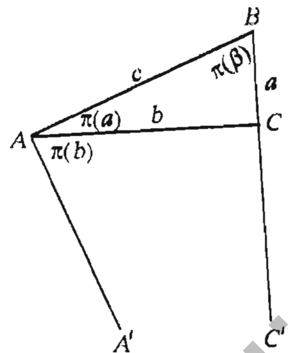
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

ΜΕ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
του ΚΑΘΗΓΗΤΗ **Β.Φ. ΚΑΓΚΑΝ**[1]

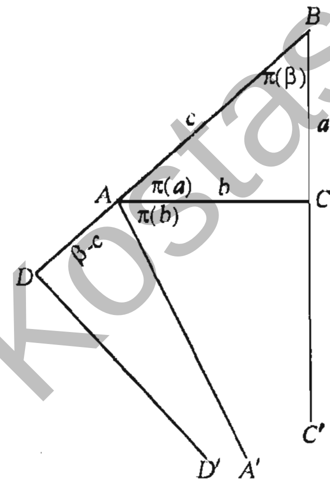
ΕΚΔΟΣΕΙΣ της ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ της ΕΣΣΔ
ΜΟΣΧΑ 1945 ΛΕΝΙΝΓΚΡΑΝΤ

[1] Το ρώσικο κείμενο αναπαράγεται από την έκδοση: Н.И. Лобачевский «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Μετάφραση, σχόλια, εισαγωγικό άρθρο και παρατηρήσεις του καθηγητή Β.Φ. Κάγκαν. — Μ.–Λ.: Εκδοτικό ΑΕ ΕΣΣΔ. 1945. 176 σ.

Η τελευταία εξίσωση παραμένει σε ισχύ και στην περίπτωση που $c = \beta$ είτε $c < \beta$. Αν $c = \beta$ (σχέδιο 33), τότε η κάθετος AA', εγκάθετη στην AB από το σημείο A, είναι παράλληλη στη πλευρά $BC = a$ με την προέκτασή της CC' επομένως, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ και την ίδια στιγμή $\Pi(c - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ (πρόταση 23)[1]. Αν $c < \beta$ (σχέδιο 34), τότε το άκρο του τμήματος β πέφτει από την άλλη μεριά του σημείου A, στο D, στην προέκταση τής υποτείνουσας AB. Η αποστημένη από εδώ κάθετος DD' προς την AD και η παράλληλή της γραμμή AA' από το [σημείο] A θα είναι επίσης παράλληλη στην πλευρά $BC = a$ με την προέκτασή της CC'. Εδώ η γωνία $DAA' = \Pi(\beta - c)$, συνεπώς $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (πρόταση 23).



Σχ. 33.



Σχ. 34.

Αφού συνδέσουμε τις δύο εξισώσεις που βρήκαμε, προκύπτει

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$
$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

απ' όπου

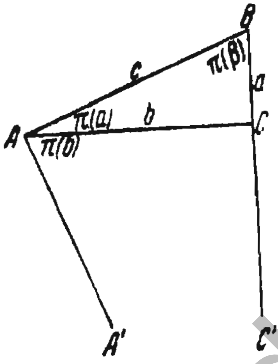
$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \frac{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)]}.$$

Αν εδώ θέσουμε την τιμή (πρόταση 35)

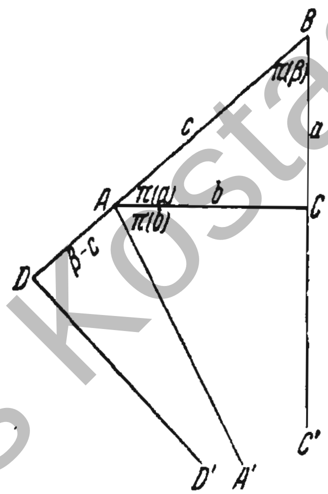
$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \cos\Pi(c),$$

[1] Βλ. το τελευταίο τμήμα της πρότασης 23: $\Pi(0) = \frac{1}{2}\pi$.

Последнее уравнение остается в силе и в том случае, когда $c = \beta$ или $c < \beta$. Если $c = \beta$ (черт. 33), то перпендикуляр AA', восставленный к AB из точки A, параллелен стороне $BC = a$ с ее продолжением CC'; следовательно, $\Pi(a) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ и в то же время $\Pi(c - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ (предложение 23).[1] Если $c < \beta$ (черт. 34), то конец отрезка β падает по другую сторону точки A, в D, на продолжении гипотенузы AB. Восставленный отсюда перпендикуляр DD' к AD и параллельная ему линия AA' из [точки] A будут также параллельны стороне $BC = a$ с ее продолжением CC'. Здесь угол $DAA' = \Pi(\beta - c)$, следовательно, $\Pi(a) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (предложение 23).



Черт. 33.



Черт. 34.

Приведя в связь оба найденных уравнения, получаем

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$
$$2\,\Pi(a) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

откуда

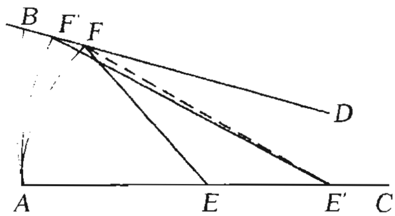
$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}.$$

Если сюда поставим значение (предложение 35)

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \cos \Pi(c),$$

[1] См. заключительный абзац предложения 23: $\Pi(0) = \frac{1}{2}\pi$.

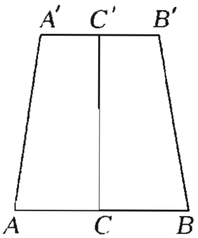
το σημείο τομής συνέπιπτε με το F' από την άλλη μεριά του B (σχέδιο 18), τότε η γωνία $\angle AF'B$ θα ήταν μικρότερη από τη γωνία ABD, η οποία κατά την ιδιότητα της οριακής γραμμής ισούται με την γωνία BAE. Στο κείμενο αποδεικνύεται με σαφήνεια ότι συνάμα $\angle BAF < \frac{1}{2}\ \angle DFE$.



Σχ. 18.

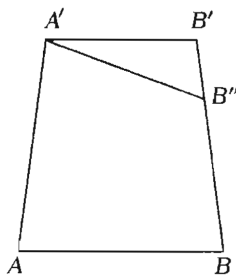
Τώρα, αφού το κέντρο Ε ήδη επιλέχτηκε και το σημείο F κατά τον τρόπο αυτό έχει επισημανθεί, θα πάρουμε μία οσοδήποτε μικρή γωνία ε και από το σημείο F θα φέρουμε την ακτίνα FE', η οποία σχηματίζει με την FD γωνία $DFE' < ε$.

Η ακτίνα αυτή θα συναντήσει την ακτίνα AC (λόγω παραλληλότητας των ακτίνων FD και AC) σε ορισμένο σημείο E'. Θα δεχτούμε τώρα το σημείο E' για κέντρο και θα φέρουμε κύκλο ακτίνας $E'A$. Ο κύκλος αυτός θα συναντήσει τον άξονα BD στο σημείο F', που επίσης βρίσκετε ως προς το B από τη μεριά του σημείου D, αλλά ανάμεσα στα B και F. Συνάμα $\angle BAF' < \frac{1}{2}\ \angle DF'E'$, ενώ $\angle DF'E' < \angle DFE'$, και γι' αυτό $\angle BAF' < \frac{1}{2}$ ε. Επειδή η γωνία ε είναι οσοδήποτε μικρή, γι' αυτό το σημείο F' με την αύξηση της ακτίνας προσεγγίζει απεριόριστα το B.



Σχ. 19.

[21] Η ουσία αυτού του συλλογισμού είναι ζήτημα για το αν παρουσιάσει δυσκολία. Παρ' όλα αυτά, η αυστηρή τεκμηρίωση αυτών των κρίσεων απαιτεί προκαταβολική θέσπιση ορισμένων απλών θεωρημάτων.



Σχ. 20.

Λήμμα 1. Αν σε ευθυγραμμικό τετράπλευρο $AA'B'B$ (σχέδιο 19) *είναι ίσες οι γωνίες οι προσκείμενες στη «κάτω βάση» ($\angle A = \angle B$) και οι «πλάγιες πλευρές» ($AA' = BB'$), τότε είναι επίσης ίσες και οι γωνίες οι προσκείμενες στην άνω βάση ($\angle A' = \angle B'$), ενώ το μέσο τμήμα (δηλαδή η ευθεία CC' που ενώνει τα μέσα των δύο βάσεων) είναι κάθετο στις βάσεις.*

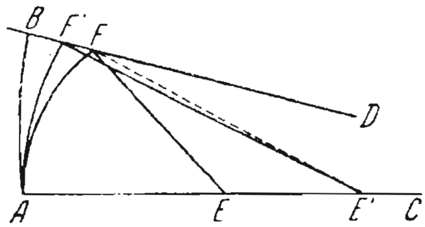
Η απόδειξη εφαρμόζεται με τοποθέτηση του τετράπλευρου επί του εαυτού του έτσι, ώστε το AB συμπίπτει με το BA, το BB' με το AA', και αντίστροφα, ενώ το μέσω τμήμα συμπίπτει με το (CC')ν εαυτό του.

Λήμμα 2. Αν σε ευθυγραμμικό τετράπλευρο $AA'BB'$ είναι ίσες οι γωνίες οι προσκείμενες στις άνω και κάτω βάσεις ($\angle A = \angle B$ και $\angle A' = \angle B'$), τότε είναι ίσες και οι πλάγιες πλευρές ($AA' = BB'$) (σχέδιο 20).

Απόδειξη εκ του αντιθέτου*. Ας υποθέσουμε ότι $AA' < BB'$. Σημειώνουμε πάνω στο BB' το τμήμα $BB'' = AA'$. Τώρα στο τετράπλευρο $AB'B''A'$ οι γωνίες οι προσκείμενες στην άνω βάση πρέπει να είναι ίσες., λόγω του προηγούμενου θεωρήματος:

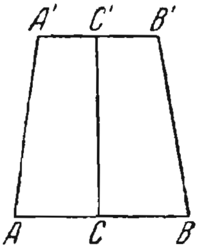
* με απαγωγή εις άτοπο. – μτφ.

бы точка пересечения падала в F' по другую сторону от B (черт. 18), то $\angle AF'B$ был бы меньше угла ABD, который по свойству предельной линии равен углу BAE. В тексте отчетливо доказано, что при этом $\angle BAF < \frac{1}{2} \angle DFE$.



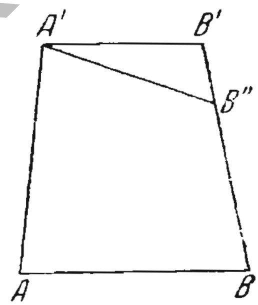
Черт. 18.

Теперь, после того как центр E уже выбран и точка F таким образом зафиксирована, возьмем произвольно малый угол ε и из точки F проведем луч FE', образующий с FD угол $DFE' < \varepsilon$. Этот луч встретит луч AC (вследствие параллельности лучей FD и AC) в некоторой точке E'. Примем теперь точку E' за центр и проведем окружность радиусом $E'A$. Эта окружность встретит ось BD в точке F', лежащей относительно B также со стороны точки D, но между B и F. Вместе с тем $\angle BAF' < \frac{1}{2} \angle DF'E'$, а $\angle DF'E' < \angle DFE'$, а потому $\angle BAF' < \frac{1}{2} \varepsilon$. Так как угол ε произвольно мал, то точка F' с увеличением радиуса неограниченно приближается к B.



Черт. 19.

[21] Сущность этого рассуждения вряд ли может представить затруднение. Тем не менее точное обоснование этих заключений требует предварительного установления нескольких простых теорем.



Черт. 20.

Лемма 1. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$* (черт. 19) *равны углы при „нижнем основании“ ($\angle A = \angle B$) и „боковые стороны“ ($AA' = BB'$), то равны также углы при верхнем основании ($\angle A' = \angle B'$), а средняя линия (т. е. прямая CC', соединяющая середины обоих оснований) перпендикулярна к основаниям.*

Доказательство осуществляется наложением чутырехугольника самого на себя, так что AB совмещается с BA, BB' с AA', и обратно, а средняя линия CC' совмещается с самой собой.

Лемма 2. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при верхнем и при нижнем основаниях ($\angle A = \angle B$ и $\angle A' = \angle B'$), то равны и боковые стороны ($AA' = BB'$)* (черт. 20).

Доказательство от противного. Допустим, что $AA' < BB'$. Отложим на BB' отрезок $BB'' = AA'$. Теперь в четырехугольнике $ABB''A'$ углы при верхнем основании в силу предыдущей теоремы

Σελ. 103

Αυτό θα γίνει τελείως φανερό, αν παρατηρήσουμε ότι με

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \frac{1}{2}\pi, \qquad \Pi(\eta) + \Pi(\eta') = \frac{1}{2}\pi \quad \text{και} \quad \eta = \alpha',$$

αναγκαία είναι $\eta' = \alpha$.

Όμως στο σφαιρικό τρίγωνο (Α) εμείς μπορούμε να μεταθέσουμε τις καθέτους z και y, μεταθέτοντας ταυτόχρονα τις μεταβλητές των οξειών γωνιών, δηλαδή ξ και η. Με άλλα λόγια, το ίδιο αυτό σφαιρικό τρίγωνο εμείς μπορούμε, βέβαια, να το παραστήσουμε με τον πίνακα

$$\begin{array}{ccc} \Pi(y), & \Pi(x), & \Pi(z), \\ \Pi(\eta), & \Pi(\xi), & \frac{1}{2}\pi\,. \end{array} \qquad (A')$$

Στη περίπτωση αυτή ακολουθείται ευθυγραμμικό τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} z, & \eta, & y, \\ \Pi(\xi'), & \Pi(x), & \frac{1}{2}\pi\,. \end{array} \qquad (B')$$

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο, για το οποίο γίνεται λόγος στο κείμενο, με τους συμβολισμούς (!) οδηγούμαστε στο τρίγωνο

$$\begin{array}{ccc} a, & \alpha', & \beta, \\ \Pi(b'), & \Pi(c), & \frac{1}{2}\pi \end{array} \qquad (C)$$

Έτσι, λοιπόν, η ύπαρξη ευθυγραμμικού ορθογώνιου τριγώνου

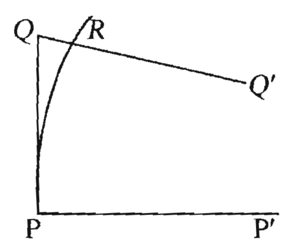
$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c, \\ \Pi(\alpha), & \Pi(\beta), & \frac{1}{2}\pi \end{array} \qquad (C')$$

ακολουθείται από την ύπαρξη σφαιρικού τριγώνου

$$\begin{array}{ccc} \Pi(c), & \Pi(\beta), & \Pi(a), \\ \Pi(b), & \Pi(\alpha'), & \frac{1}{2}\pi\,. \end{array}$$

Το τελευταίο ακολουθείται, αντίστροφα, όχι μόνο από την ύπαρξη του τριγώνου (C′), αλλά και του τριγώνου (C)· τα δύο αυτά ευθυγραμμικά τρίγωνα γι' αυτό υπάρχουν πάντα ταυτόχρονα.

[27] Αναπαριστούμε τα σχέδια και τους συλλογισμούς, που αντιστοιχούν σ' αυτό το δεύτερο περίγραμμα. Θα παρατηρήσουμε προκαταβολικά το εξής: αν από το σημείο P της οριακής γραμμής PR (σχέδιο 23) φέρουμε την εφαπτομένη PQ, πάνω σ' αυτήν επισημάνουμε τμήμα PQ και από το σημείο Q φέρουμε ακτίνα QQ', παράλληλη στον άξονα PP', ο οποίος θα συναντήσει την οριακή ευθεία στο σημείο R, τότε το τόξο PR ορίζεται πλήρως από το μήκος του τμήματος PQ. Αν το τμήμα αυτό το ονομάσουμε *εφάπτον ύψος* του οριακού τόξου PR, τότε μπορεί να λεχθεί πως το *οριακό τόξο*



Σχ. 23.

Это станет совершенно ясным, если заметим, что при

$$\Pi(\alpha)+\Pi(\alpha')=\frac{\pi}{2}, \qquad \Pi(\eta)+\Pi(\eta')=\frac{\pi}{2} \text{ и } \eta=\alpha',$$

необходимо $\eta'=\alpha$.

Но в сферическом треугольнике (A) мы можем транспонировать катеты z и y, транспонируя в то же время аргументы острых углов, т. е. ξ и η. Иначе говоря, тот же сферический треугольник (A) мы можем, конечно, представить таблицей

$$\begin{matrix} \Pi(y), & \Pi(x), & \Pi(z), \\ \Pi(\eta), & \Pi(\xi), & \frac{1}{2}\pi, \end{matrix} \qquad (\mathrm{A}')$$

в таком случае он влечет за собой прямолинейный треугольник

$$\begin{matrix} z, & \eta, & y, \\ \Pi(\xi'), & \Pi(x), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix} \qquad (\mathrm{B}')$$

В применении к треугольнику, о котором идет речь в тексте, при обозначениях (!) это приводит к треугольнику

$$\begin{matrix} a, & \alpha' & \beta, \\ \Pi(b'), & \Pi(c), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix} \qquad (\mathrm{C})$$

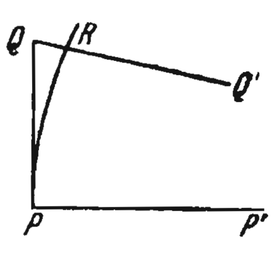
Итак, существование прямолинейного прямоугольного треугольника

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ \Pi(\alpha), & \Pi(\beta), & \frac{1}{2}\pi \end{matrix} \qquad (\mathrm{C}')$$

влечет за собой существование сферического треугольника

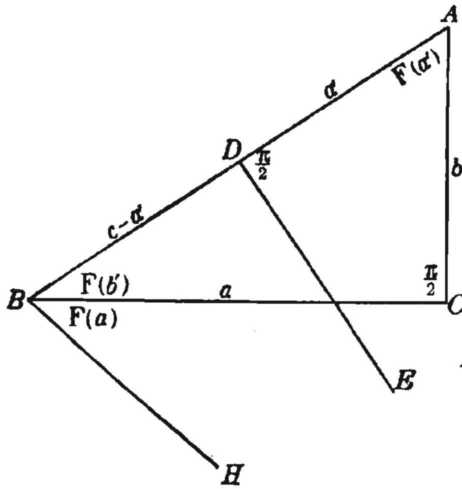
$$\begin{matrix} \Pi(c), & \Pi(\beta), & \Pi(a), \\ \Pi(b), & \Pi(\alpha'), & \frac{1}{2}\pi; \end{matrix}$$

это же влечет за собой, обратно, не только существование треугольника (C'), но и треугольника (C); эти два прямолинейных треугольника поэтому всегда существуют одновременно.

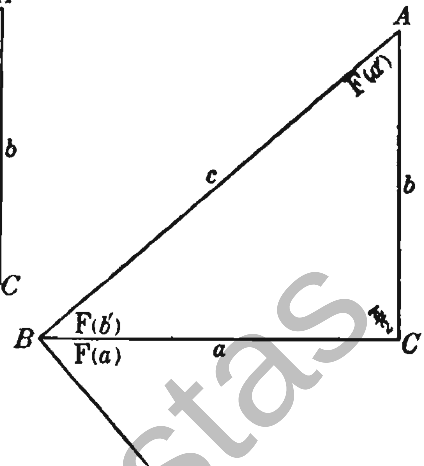


Черт. 23.

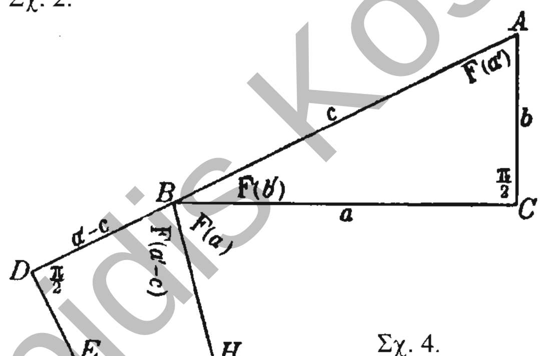
[27] Воспроизводим чертежи и рассуждения, соответствующие этой второй конфигурации. Заметим предварительно следующее: если из точки P предельной линии PR (черт. 23) проведем касательную PQ, на ней отложим отрезок PQ и из точки Q проведем луч QQ', параллельный оси PP', которая встретит предельную линию в точке R, то дуга PR вполне определяется длиной отрезка PQ. Если этот отрезок назовем *тангенциальной высотой* предельной дуги PR, то можно будет сказать, что *предельная дуга*



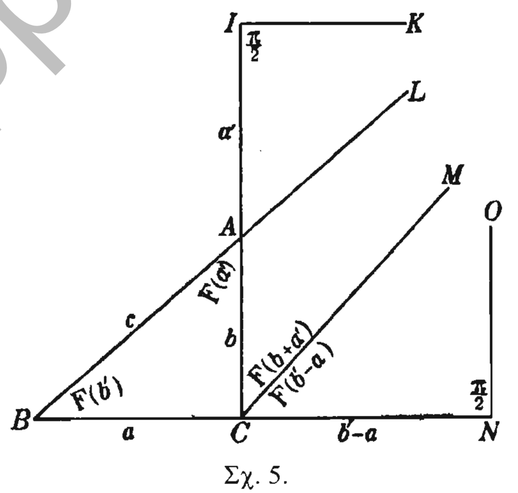
Σχ. 2.



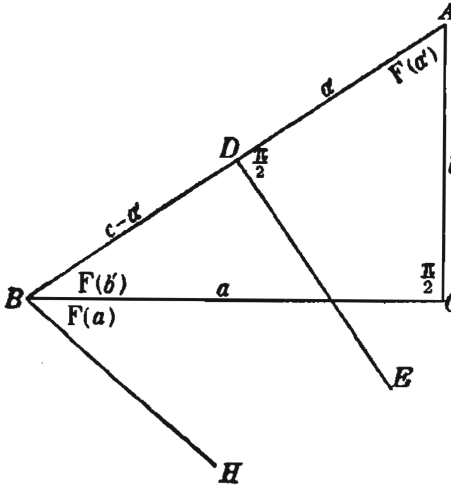
Σχ. 3.



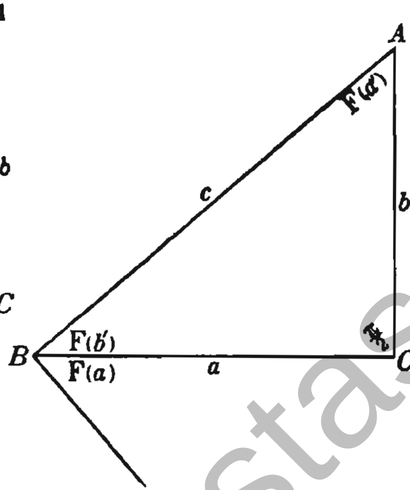
Σχ. 4.



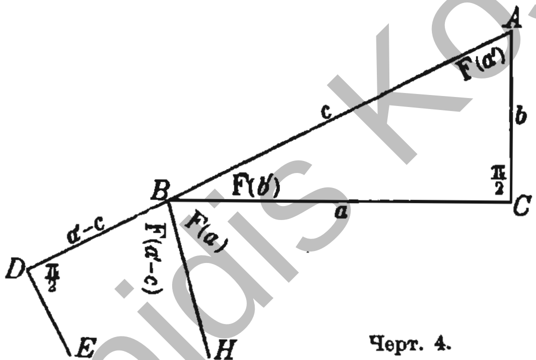
Σχ. 5.



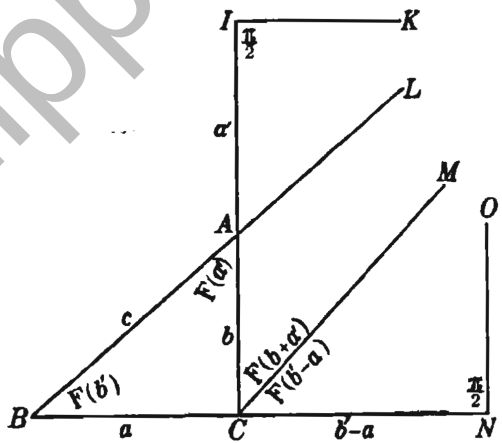
Черт. 2.



Черт. 3.



Черт. 4.



Черт. 5.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ
Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Ν. Ι. Λομπατσέφσκι
ΔΙΑΛΕΚΤΑ ΕΡΓΑ

Составитель и редактор
профессор Нижегородского государственного университета
им. Н.И. Лобачевского
Инна Сергеевна ЕМЕЛЬЯНОВА

Επιμέλεια έκδοσης της καθηγήτριας
του Κρατικού Πανεπιστημίου του Νίζνι Νόβγκοροντ «Ν.Ι. Λομπατσέφσκι»
Ίννα Σεργκέεβνα ΕΜΕΛΙΑΝΟΒΑ

Перевод с русского языка на греческий
ФИЛИППИДИС Константинос Георгиос
ФИЛИППИДА Каллиопи Константинос

Μετάφραση από τα Ρώσικα στα Ελληνικά
ΦΙΛΙΠΠΙΔΗΣ Κωνσταντίνος του Γεωργίου
ΦΙΛΙΠΠΙΔΟΥ Καλλιοπη Κωνσταντίνου

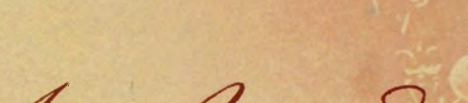
Формат 74×108 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 21,3. Усл. печ. л. 23,49. Заказ № 1899. Тираж 400 экз.

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.
Εκδόσεις του Κρατικού Πανεπιστημίου του Νίζνι Νόβγκοροντ
«Ν.Ι. Λομπατσέφσκι»

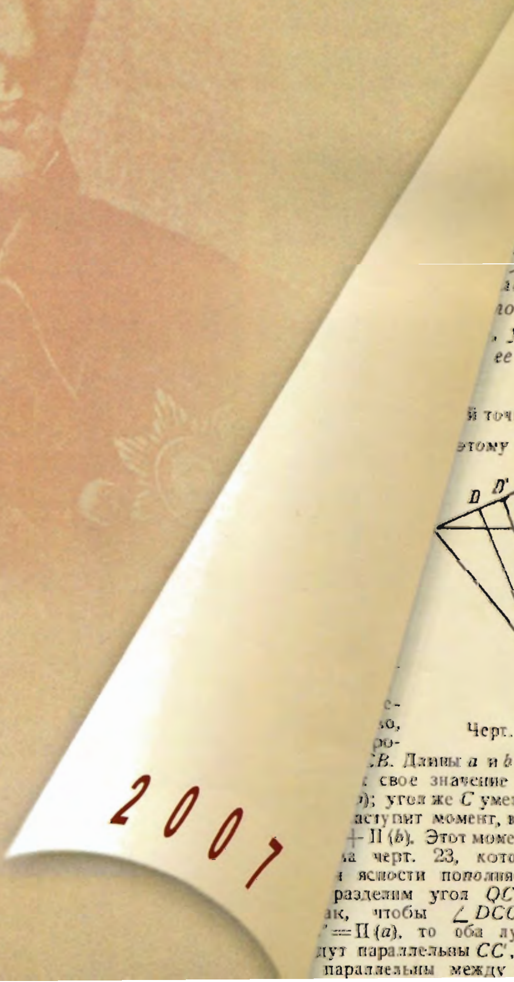
Типография Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.
603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.

Νικολάι ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ

ΔΙΑΛΕΚΤΑ ΕΡΓΑ



Μετάφραση από τα Ρώσικα στα Ελληνικά



2007