

# Ο Μαθηματικός Παιδαγωγός για το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό σχολείο γενικής - πολυτεχνικής εκπαίδευσης

του Κώστα Φιλίππιδη\*

Η δημοσίευση αυτών των προβληματισμών εντάσσεται στην προσπάθεια να διασαφηνιστεί η παιδαγωγική αποστολή του εκπαιδευτικού, από κοινωνική κι επιστημονική άποψη. Ξεκινήσαμε στο τεύχος 8/ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΙΔΕΙΑΣ με το άρθρο για τη λειτουργία του εκπαιδευτικού στο κατώτερο τμήμα του Δωδεκάχρονου σχολείου Βασικής Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης και συνεχίσαμε στο τεύχος 9/ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΙΔΕΙΑΣ με το Φιλόλογο Παιδαγωγό στο Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό Υποχρεωτικό Σχολείο.

Ο συγγραφέας, με αφετηρία την ανάγκη ενός σχολείου που θα έχει σκοπό την ολόπλευρη διαμόρφωση της προσωπικότητας κάθε μαθητή, εξετάζει τον εκπαιδευτικό των Μαθηματικών όχι σαν προγυμναστή εισαγωγικών εξετάσεων επιλογής αλλά σαν πραγματικό παιδαγωγό. Εκθέτοντας την κοινωνική αναγκαιότητα ενός διαφορετικού σχολείου, προσπαθεί να θεμελιώσει τον επιστημονικό χαρακτήρα και το περιεχόμενο της εφαρμοσμένης επιστήμης του Μαθηματικού Παιδαγωγού (αποτέλεσμα της σύνθεσης των επιστημών της Παιδαγωγικής, Ψυχολογίας και των Μαθηματικών και με το απαραίτητο φιλοσοφικό υπόβαθρο για την εκπλήρωση της συγκεκριμένης κοινωνικής λειτουργίας).

Η επιστημονική αυτή θεμελίωση έρχεται σε αντίθεση με την προσπάθεια των κυβερνήσεων να διαχωρίσουν την Παιδαγωγική από την επιστημονική επάρκεια του εκπαιδευτικού, υποβαθμίζοντας την εκπαίδευση και τη λειτουργία του. Χαρακτηριστικό είναι ότι στο σχέδιο εργασίας Συνεδρίου, που προγραμματίζεται στο πλαίσιο της ελληνικής προεδρίας στην ΕΕ, σχετικά με την εκπαίδευση κι επιμόρφωση του εκπαιδευτικού διατυπώνεται η κατευθυντήρια θέση για «σαφή διάκριση μεταξύ της ακαδημαϊκής γνώσης και της απαραίτητης επαγγελματικής κατάρτισης». Αντί η κατάρτιση του Μαθηματικού Παιδαγωγού να αντιμετωπίζεται με επιστημονικούς όρους - να πραγματοποιείται εξολοκλήρου στο πανεπιστήμιο, σε τμήματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης για δασκάλους μαθηματικούς μέσα από παιδαγωγικές σχολές - σήμερα παρατηρούμε την απόσπασή της από τις επιστημονικές σπουδές. Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά τμήματα των πανεπιστημίων αντιμετωπίζεται αποσπασματικά, με μεμονωμένα μαθήματα παιδαγωγικών και διδακτικής σε προπτυχιακό επίπεδο, ενώ σε μεταπτυχιακό επίπεδο προσθέτουν δύο εξάμηνα για ξεχωριστό πιστοποιητικό παιδαγωγικής και διδακτικής επάρκειας. Η εκπαίδευση αυτή σχετικά καλύπτει τις ανάγκες του σημερινού μέσου σχολείου-φροντιστηρίου, που είναι εξαρτημένο από τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ΑΕΙ, με μοιραία κατάληξη τη μετατροπή του σε επιλεκτικό χώρο προετοιμασίας των αυριανών ειδικών.

Ο συγγραφέας όμως ξεκινάει από την αναγκαιότητα ενός σχολείου Βασικής-Γενικής εκπαίδευσης με πολυτεχνικό ορίζοντα και χαρακτήρα. Η πολυτεχνική εκπαίδευση - όρος της σοσιαλιστικής παιδαγωγικής - δεν είναι ειδική επαγγελματική, αλλά αντίθετα η αναγκαία γενική εκπαίδευση της εποχής μας, που επιδιώκει να γνωρίσει στον κάθε μαθητή τις βάσεις των επιστημών που εφαρμόζονται σε όλους τους βασικούς κλάδους της σύγχρονης παραγωγής και να τον μορφώσει δραστήρια και σφαιρικά, χωρίς μονομέρειες, σε αρμονική και ισορροπημένη προσωπικότητα.

Σε ένα τέτοιο σχολείο έχει θέση η διαλεκτική διδακτική των Μαθηματικών, που συνδέει τη θεωρία με την πράξη και κάνει το μάθημα αγαπητό κι ωφέλιμο για την ενεργητική αντιμετώπιση της ζωής. Ο συγγραφέας αντλώντας μεθοδολογικά από τη μεγάλη ανατροπή που προήλθε από τη Γεωμετρία του Λομπατσέφσκι και των επιτευγμάτων της σοβιετικής κυρίως επιστήμης, οδηγείται στην απαίτηση η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο να μη στηρίζεται στην αξιωματική- παραγωγική μέθοδο (εφόσον τα ίδια τα Μαθηματικά δεν αναπτύσσονται έτσι) αλλά στην επιστημονική γνωριμία-σύνδεσή τους με την πραγματικότητα. Άλλωστε «δεν υπάρχει κλάδος των Μαθηματικών, όσο αφηρημένος και αν είναι, που δεν θα εφαρμοστεί κάποια μέρα σε φαινόμενα του πραγματικού κόσμου» (Lobachevskii).

Το άρθρο του Κώστα Φιλίππιδη ελπίζουμε να προκαλέσει ουσιαστική συζήτηση για τη μαθηματική εκπαίδευση στη χώρα μας αλλά και για διαφορετική αντιμετώπιση των σχολικών μαθηματικών. Ιδιαίτερη σημασία δίνουμε στις επιστημάνσεις του συγγραφέα για το λαϊκό παιδαγωγό, που διαμορφώνεται στην κοινωνικοπολιτική δραστηριότητα για το σχολείο των σύγχρονων λαϊκών αναγκών, με την προσεκτική του προσπάθεια για γενική επιστημονική θεώρηση της πραγματικότητας και την εξάντληση όλων των μέσων για την πραγμάτωση της παιδαγωγικής του αποστολής.



\* Ο Κώστας Γ. Φιλίππιδης είναι μαθηματικός κι εργάζεται αναπληρωτής εκπαιδευτικός στη Μέση εκπαίδευση. Είναι πτυχιούχος Παιδαγωγικής των Μαθηματικών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Τασκένδης



«Όποιος στηρίζεται μόνο στα αξιώματα,  
τα Μαθηματικά δε θα τον βοηθήσουν να υπολογίσει  
την αξία μιας δεκάδας αυγών, γνωρίζοντας την τιμή του ενός αυγού».

H. FREUDENTAL

(*Mathematik als padagogische aufgabe, Band2, Stuttgart, 1977*)

## Αναπαραγωγή – δραστηριότητα - μόρφωση

Κεντρική έννοια των παρακάτω συλλογισμών μας είναι η έννοια της **αναπαραγωγής** με την πλατύτερη κοινωνικο-φιλοσοφική της σημασία. Η κοινωνική πρόοδος συντελείται μέσα από την αναπαραγωγή της κοινωνικής παραγωγής· ο τρόπος παραγωγής καθορίζει τον τρόπο ύπαρξης του ανθρώπινου είδους.

Η ικανότητα για αναπαραγωγική διαδικασία είναι έμφυτη στα ζωικά είδη. Η διαφορά της ανθρώπινης αναπαραγωγικής διαδικασίας από την αντίστοιχη των ζώων εδράζεται στο γεγονός ότι ο άνθρωπος στην επαφή του με τη φύση εργάζεται, ενώ το ζώο μόνο επενεργεί. Η εργασία του ανθρώπου βασίζεται στη δραστηριότητα, ενώ η επενέργεια των ζώων βασίζεται στην απλή συμπεριφορά. Για το λόγο αυτό η αναπαραγωγή του ζώου δεν μπορεί να το βγάλει από τη βιολογική του κατάσταση. Αντίθετα, η δραστηριότητα ως ουσιαστικό διακριτικό γνώρισμα του ανθρώπου προσδίδει στην εργασία του κοινωνική διάσταση και ορίζει τον άνθρωπο ως κοινωνικά παραγωγικό όν. Συνεπώς οποιαδήποτε λειτουργία του ανθρώπου πρέπει να χαρακτηρίζεται στη βάση της ως **δραστηριότητα**.<sup>1</sup>

Από τη σκοπιά αυτή η Παιδεία είναι ένας από τους τομείς της αναπαραγωγής της κοινωνικής διαδικασίας συσχέτισης των ανθρώπων με το φυσικό περιβάλλον και μεταξύ τους, της κοινωνικής οργάνωσης και ανάπτυξης, και των πνευματικών εκδηλώσεων αυτής της συσχέτισης (επιστήμη, τέχνη, φιλοσοφία, θρησκεία, πολιτική κ.ο.κ.). Γίνεται φανερό πως η Παιδεία είναι ιδεολογικός τομέας που αντανάκλα τις δοσμένες κοινωνικές σχέσεις. Παιδαγωγός, με την ευρύτερη έννοια, είναι η ιδιότητα του ανθρώπου που δραστηριοποιείται στον τομέα της Παιδείας (οικογένεια, εκπαιδευτικά ιδρύματα, κοινωνικές και παραγωγικές ομάδες κτλ.) και ως αποτέλεσμα έχει το έργο της αγωγής. Συμπεραίνεται λοιπόν πως η δραστηριότητα του παιδαγωγού δεν περιορίζεται στο να μαθαίνει σε κάποιους ορισμένα στοιχεία, ας πούμε, του ανθρώπινου πολιτισμού. Κύριος σκοπός του είναι η προσφορά και η **διαμόρφωση** εκείνων των όρων που θα επιτρέπουν στον άνθρωπο (σύμφωνα με την ηλικία και την κοινωνική θέση) να αναπτύσσει το κοινωνικό του Είναι με στόχο την ένταξή του στην προαναφερθείσα διαδικασία της αναπαραγωγής. Η μάθηση (ως γνωστική διαδικασία) υποτάσσεται σ' αυτόν τον σκοπό σαν συστατικό και βασικό στοιχείο της αγωγής.<sup>2</sup> Στο βαθμό που ο άνθρωπος αποκτά αγωγή, αποκτά και **προσωπικότητα**. Με λίγα λόγια, Παιδεία σημαίνει διαμόρφωση προσωπικότητας.

Αυτές οι κατευθυντήριες παιδαγωγικές θεωρήσεις του μαρξισμού του ΧΧ αιώνα (με κύρια πηγή τους τη σοβιετική μαρξιστική σκέψη), αποτελούν και την αφετηρία μας για να προχωρήσουμε στην εξειδίκευσή τους για το σκοπό του παρόντος άρθρου. Δεν πρόκειται για επιστημονική πραγματεία αλλά για έκθεση προσωπικών πεποιθήσεων, βασισμένων σε επιστημονική θεμελίωση της **θέσης του Μαθηματικού Παιδαγωγού**, που αποτελεί ανάγκη για το διαπαιδαγωγητικό έργο του απαιτού-

μενου σήμερα **Ενιαίου Δωδεκάχρονου Βασικού Υποχρεωτικού σχολείου**. Τούτο σημαίνει ότι η επισκόπησή μας επιδέχεται κάθε καλόπιστη κριτική, διάλογο και αντίλογο με σκοπό τη συμβολή στο κοινό έργο της μαχόμενης παιδείας.

## Η επιστήμη του Μαθηματικού -Παιδαγωγού

**Μαθηματικός-παιδαγωγός** είναι ο άνθρωπος που έχει για επάγγελμα την αναπαραγωγή των Μαθηματικών δραστηριοτήτων στον τομέα της Παιδείας και ειδικότερα στην εκπαίδευση. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να έχει και θεωρητικό και πρακτικό χαρακτήρα και δημιουργεί μια εφαρμοσμένη επιστήμη. Η κοινωνική εμπειρία μας υπαγορεύει να την ονομάσουμε «**Παιδαγωγική των Μαθηματικών**» (ΠΜ). Η σύνθεσή της προκύπτει ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης που ασκούν μεταξύ τους διάφορες επιστήμες (θεμελιακές και εφαρμοσμένες) μέσα από την πρακτική παιδαγωγική δραστηριότητα των Μαθηματικών. Μεταξύ των «συμβαλλόμενων» επιστημών είναι τα Μαθηματικά, η Παιδαγωγική, η Ψυχολογία, η Πληροφορική, η Ιστορία, η Φιλοσοφία κ.ά.

Το γεγονός ότι η ΠΜ εμφανίζεται μέσα από ποικιλία θεωρήσεων παραπλανεί ορισμένους να πιστεύουν ότι τέτοια επιστήμη δεν υπάρχει. Πιστεύουν ότι αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο συνταγών διεκπεραίωσης και που τις κατέχουν μόνο οι έμπειροι και οι «εκ φύσεως» ικανότεροι. Στην πραγματικότητα πρόκειται για διάφορες μορφές έκφρασης αυτής της επιστήμης ανάλογα με την κοινωνική θέση, τον ιδεολογικό κοσμοθεωρητικό προσανατολισμό και την επαγγελματική κατάρτιση του θεωρούντος ή του ασκούντος το παιδαγωγικό έργο. Την ύπαρξη ή μη της επιστήμης δεν την κρίνουμε από το πώς την καταλαβαίνει ο οποιοσδήποτε συγγραφέας, αλλά από το αν και πώς στη συγκεκριμένη ιστορική στιγμή διαμορφώθηκε το αντικείμενό της.

Η ΠΜ είναι ώριμος καρπός της Επιστημονικό - Τεχνικής προόδου του ΧΧ αιώνα, ενώ τα σπάργανά της βρίσκονται στην εποχή της Μεγάλης Γαλλικής Επανάστασης (βλ. του ελβετού παιδαγωγού Γ. Χ. Πεσταλότσι, 1746 - 1827, «*Εποπτική διδασκαλία του αριθμού*») και τα πρώτα θήματά της αρχίζουν από τα τέλη του ΧΙΧ αιώνα με το μεγάλο κίνημα της Μεταρρύθμισης των Μαθηματικών. Η αλματώδης ανάπτυξη της επιστήμης - και βέβαια πριν απ' όλα στη Σοβιετική Ένωση, που τη δεκαετία το '50, για πρώτη φορά στην ιστορία, έβαλε σε τροχιά διαστημικούς δορυφόρους - έκαναν ακόμα πιο φανερή την ανάγκη για αλλαγές στην ΠΜ. Μέσα από όλη αυτή την πορεία η κοινωνική παιδαγωγική πρακτική έφτασε σήμερα στο επίπεδο εκείνο που να είναι σε θέση να προσδιορίσει το **αντικείμενο** του Μαθηματικού-Παιδαγωγού και τα **μέσα** παρέμβασής του στο αντικείμενο αυτό. Είναι γνωστό ότι η ΠΜ έχει για αντικείμενό της τη **μαθηματική δραστηριότητα ως διανοητικό και πολιτιστικό στοιχείο της προσωπικότητας** κάθε ηλικίας, κάθε τομέα κοινωνικής δραστηριότητας (εργασίας) και επιπέδου σπουδών της. Παρατηρούμε ότι εδώ η ΠΜ ορίζεται από τρεις όρους: τον προσδιορισμό «**μαθηματικό**», το αντικείμενο «**δραστηριότητα**» και το υποκείμενο «**προσωπικότητα**». Ο κάθε όρος αντιπροσωπεύεται αντίστοιχα από τις επιστήμες: τα **Μαθηματικά**, την **Ψυχολογία** και την **Παιδαγωγική**. Ενωτικό θεμέλιο όλων αυτών αποτελεί η **Φιλοσοφία**. Η Φιλοσοφία ως κοσμοθεωρητική γνώση διαμορφώνει το συγκεκριμένο περιεχόμενο των τριών όρων του αντικειμένου και τον προσανατολισμό τους μέσα στο ιστορικό γίνεσθαι. Δηλαδή, σε τελική ανάλυση, καθορίζει τη θέση και το ρόλο που αποδίδεται στην ΠΜ στο σύνολο της εκπαιδευτικής γνώσης και πρακτικής.





Από εδώ γίνεται κατανοητό γιατί υπάρχουν «πολλές» ΠΜ. Εκείνο που μένει «απαρατήρητο» είναι ότι όλες αυτές χωρίζονται σε δύο κατευθύνσεις. Η μια είναι αυτή που διαμορφώθηκε μέσα στην αστική κοινωνία και εξακολουθεί να την υπηρετεί. Στη βάση της έχει τις διάφορες ιδεαλιστικές και μεταφυσικές «φιλοσοφίες», που δε θίγουν την ταξική και μεταφυσική φύση της μαθηματικής παιδείας σε κάθε εκσυγχρονιστική έκδοσή της.<sup>3</sup> Αυτή την κατεύθυνση μπορούμε να την ονομάσουμε **παραδοσιακή**. Η άλλη κατεύθυνση, η δεύτερη, έχει αντίθετα στη βάση της τον **ιστορικο-διαλεκτικό υλισμό** ή αλλιώς, για να μιλήσουμε στη γλώσσα της κοινωνιολογίας, την κοσμοθεωρία του Επιστημονικού κομμουνισμού. Η ιστορική πείρα από την εφαρμογή της μας επιτρέπει να ονομάσουμε αυτήν την κατεύθυνση της ΠΜ **λαϊκή**. Γνωρίζουμε από την εμπειρία των σοσιαλιστικών χωρών του ΧΧ αιώνα ότι εκφράστηκε ποικιλότητα αλλά με κοινή συνισταμένη-μορφωτικές κατακτήσεις που το αστικό σχολείο ούτε στις καλύτερες στιγμές του δεν παραχώρησε σε κανένα λαό. Η εμπειρία αυτή, με όποιους προβληματισμούς μπορεί να εμπεριέχει, είναι μια πολύτιμη κληρονομιά για όλους τους λαούς και περιμένει την ολόπλευρη και σε βάθος μελέτη της και την εφαρμογή της. Επίσης είναι γεγονός ότι η ΠΜ αυτής της κατεύθυνσης έχει επηρεάσει την επίσημη μαθηματική παιδεία των μη σοσιαλιστικών χωρών όλου του κόσμου, βρισκόμενη σε συνεχή αντιπαράθεση με την τελευταία. Αν ανάμεσα στις δύο αυτές κατευθύνσεις, την παραδοσιακή και τη λαϊκή, προσπαθήσει κανείς να εντάξει άλλα ρεύματα με ονομασίες, π.χ. «προοδευτική» ή «σύγχρονη», ή «ανεξάρτητη» και οτιδήποτε άλλο, τότε χάνει την ουσία της ΠΜ και θολώνει το πραγματικό περιεχόμενό της.

Το ζήτημα του αντικείμενου της ΠΜ έχει πρώτιστη σημασία για δύο τουλάχιστον λόγους. Πρώτο, γιατί απαιτεί να προσδιορίζεται με σαφήνεια ο σκοπός που θέτει η δοσμένη κοινωνία για τη μαθηματική παιδεία των μελών της. Δεύτερο, γιατί ορίζει συγκεκριμένα το γενικό περίγραμμα του περιεχομένου της ίδιας της επιστήμης. Για παράδειγμα, στην πρώτη περίοδο της σοβιετικής παιδαγωγικής σχολής, αλλά και μέχρι σήμερα, κυρίως στην αμερικάνικη παιδαγωγική σχολή, το αντικείμενο της Παιδαγωγικής ταυτίζεται με το αντικείμενο της Ψυχολογίας. Από εδώ προκύπτουν σοβαρά προβλήματα, όπως με τα γνωστά τεστ κατηγοριοποίησης των ανθρώπων, την αντικατάσταση της ανάπτυξης των δραστηριοτήτων του ατόμου ή ολόκληρων ομάδων με τον έλεγχο της συμπεριφοράς κ.ο.κ.<sup>4</sup>

## Πολυτεχνική αγωγή

Οι συγχύσεις σχετικά με το αντικείμενο της Παιδαγωγικής, και κατά συνέπεια της ΠΜ, δεν είναι τυχαίες ούτε υποχρεωτικά σκόπιμες. Έχουν βαθιές γνωστικές αλλά και ιστορικές ρίζες. Είναι προϊόν της αντίθεσης γνώσης και αγωγής ως αντανάκλασης της αντίθεσης πνευματικής και

χειρωνακτικής εργασίας, η οποία έχει ταξικό χαρακτήρα. Τη λύση τη δίνει η ίδια η ιστορία της παιδαγωγικής θεωρίας και πράξης: **Αγωγή μέσω εργασίας και μέσα από συλλογικές διαδικασίες.**<sup>5</sup>

Η πρόταση αυτή μας παρουσιάζει τη βασική αρχή της λαϊκής ΠΜ. Πρόκειται για συγκεκριμενοποίηση της εξής φιλοσοφικής θέσης του Κ. Μάρξ: «*Αν ο άνθρωπος από τη φύση του είναι κοινωνικό όν, τότε αυτό μόνο στη κοινωνία μπορεί να αναπτύξει τη φύση του, και για τη δύναμη της φύσης του πρέπει να κρίνουμε όχι από τη δύναμη των ξεχωριστών ατόμων, αλλά με τη δύναμη όλης της κοινωνίας.*»<sup>6</sup> Η θέση αυτή του διαλεκτικού και ιστορικού υλισμού, που θεμελιώθηκε στη συνέχεια από τον Φ. Ένγκελς με την εργασιακή θεωρία γέννησης του ανθρώπου, αρκεί για να δώσει ζωή στη μαρξιστική Παιδαγωγική.

Οι Κ. Μάρξ και Φ. Ένγκελς μελετώντας τις αντικειμενικές συνθήκες ανάπτυξης της κοινωνίας οδηγήθηκαν στην ιδέα πως η σύνδεση της μάθησης με την παραγωγική εργασία και τη γυμναστική αποτελεί το μοναδικό μέσο που επιτρέπει στο άτομο να ξεπεράσει το διαχωρισμό της χειρωνακτικής και της πνευματικής εργασίας που επέβαλε η ταξική κοινωνία. Είναι βασική προϋπόθεση για την ολοκλήρωση της προσωπικότητας. Αυτό όμως ως κατάληξη της ιστορικής προσέγγισης της εργασίας και του ρόλου της στην ανάπτυξη του ανθρώπου.

Πριν απ' όλα επισήμαναν τις συνθήκες της μεγάλης βιομηχανικής παραγωγής, όπου αναπτύσσεται η κοινωνικοποίηση της εργασίας, άρα και η αλληλοσύνδεση όλων των κλάδων της κοινωνικής παραγωγής. Ταυτόχρονα, από τον ίδιο τον καπιταλιστικό τρόπο παραγωγής επιβάλλεται, από τη γένεσή του ακόμα, ο τεμαχισμός μέχρις εσχάτων της παραγωγικής διαδικασίας σε επιμέρους ειδικεύσεις με σκοπό την εντατικοποίηση (βλ. αυτοματοποίηση) της παραγωγής. Από εδώ συνεπάγεται ο περιορισμένος χαρακτήρας της εκπαίδευσης για την εργατική τάξη που γίνεται αντικείμενο εκμετάλλευσης, φαινόμενο διακριτό σε όλες τις ταξικές κοινωνίες. Το σημερινό μοντέλο περιορισμού της λαϊκής μόρφωσης λέγεται «*δια βίου εκπαίδευση*» και αποσκοπεί στην ειδίκευση μιας χρήσης και στη διαρκή εναλλαγή της. Γίνεται κατανοητό ότι έτσι διαμορφώνονται «άτομα» που δεν έχουν γενική γνώση της παραγωγικής διαδικασίας και των συνθηκών της, αν και εντάσσονται κατά καιρούς σ' αυτήν. Κατά συνέπεια είναι αδύνατη και η δυνατότητα ευελιξίας των ίδιων αυτών ανθρώπων σε μια παραγωγή που γίνεται καθημερινά όλο και πιο σύνθετη. Σε αντίθεση με τέτοιου είδους αντιλήψεις που στρέφονται ενάντια στον άνθρωπο οι Κ. Μάρξ και Φ. Ένγκελς πρόβαλαν την **πολυτεχνική εκπαίδευση**. Η πολυτεχνική εκπαίδευση αποτελεί μια νέα μορφή **γενικής** εκπαίδευσης, τόσο αναγκαία στην εποχή μας, που και γι' αυτό θα πρέπει να είναι στο σύνολό της υποχρεωτική. Με την αποπεράτωση της εκπαίδευσης πολυτεχνικού χαρακτήρα ο μαθητής γνωρίζεται **με τις βάσεις όλων των επιστημών και τις επιστημονικές βάσεις της σύγχρονης κοινωνικής παραγωγής**. Από εδώ και ο χαρακτηρισμός της ζητούμενης εκπαίδευσης ως **βασικής**. Με άλλα λόγια η γενική-πολυτεχνική εκπαίδευση είναι το αντίθετο της πρώιμης «ακαδημαϊκής» ή επαγγελματικής ειδίκευσης. Αυτό σημαίνει ότι το περιεχόμενο του κάθε μαθήματος δεν εξειδικεύεται σ' αντιστοιχία με τις μετέπειτα εκπαιδευτικές ή επαγγελματικές διαδρομές, αλλά αντίθετα θα πρέπει να συγκεντρώνεται σε τέτοιες κεντρικές ιδέες της επιστήμης, που να επιτρέπουν την έξοδο των εφαρμογών της σε όλους τους σύγχρονους κλάδους της παραγωγής, της επιστήμης και του πολιτισμού γενικά.



## Πολυτεχνικός προσανατολισμός των σχολικών Μαθηματικών

Ας πάρουμε για παράδειγμα την έννοια του διανύσματος.<sup>7</sup> Έστω ότι η έννοια αυτή παρουσιάζεται σαν αυτοτελής τομέας των Μαθηματικών, σαν ξεχωριστό κεφάλαιο του διανυσματικού λογισμού. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε χρήση του διανύσματος σαν κεντρική ιδέα της σύγχρονης επιστήμης, αλλά σαν ένα ακόμα νεκρό “μεταφυσικό” αντικείμενο που εφευρέθηκε από ένα σχολαστικό νου για να θαυμάζει την ομορφιά των Μαθηματικών. Παραμένει άγνωστο για το μαθητή το γεγονός ότι αυτό το διάνυσμα, όταν παρουσιαστεί σαν θεμελιακή ιδέα που συνθέτει ολόκληρους κλάδους των Μαθηματικών (άλγεβρα, γεωμετρία), πλατύνει την έξοδο των εφαρμογών τους στη σύγχρονη αυτοματοποιημένη παραγωγή.

Βέβαια η σύνδεση της επιστήμης με την παραγωγή δεν είναι δυνατή μόνο με το μάθημα των Μαθηματικών. Θα πρέπει το έργο αυτό του Μαθηματικού-Παιδαγωγού να είναι ενταγμένο στη συνολική παιδαγωγική λειτουργία του σχολείου προς την ίδια κατεύθυνση, τη σφαιρική διαμόρφωση της προσωπικότητας. Θα πρέπει μέσα από το πρόγραμμα του μαθήματος και το συνολικό πρόγραμμα εργασίας του σχολείου και με ανάλογη υλικοτεχνική υποδομή να εξασφαλίζεται: πρώτο, η συνάφεια του μαθήματος των Μαθηματικών με τα μαθήματα των άλλων όμορων επιστημών και, δεύτερο, η σύνδεση του σχολείου με όσο το δυνατό περισσότερες πραγματικές παραγωγικές διαδικασίες στους διάφορους τομείς της εθνικής οικονομίας.

Ένα παράδειγμα ακόμα. Η σημερινή σχέση των Μαθηματικών με τη Φυσική περιορίζεται κύρια στη δεξιότητα χειρισμού των φυσικών ή των μαθηματικών τύπων. Δηλαδή στο επίπεδο των τύπων της άλγεβρας. Και τούτο παρόλο που τα σχολικά Μαθηματικά περιέχουν ένα σωρό στοιχεία των λεγόμενων ανώτερων Μαθηματικών. Πολλά από αυτά τα χρησιμοποιεί η σχολική Φυσική. Όμως όταν, για παράδειγμα, σαν βάση της έννοιας της παραγώγου<sup>8</sup> δεν χρησιμοποιείται η ποσοτική ουσία της (που είναι και ιστορικά, άρα και λογικά το ουσιαστικό γνώρισμά της), τότε γίνεται κατανοητό γιατί στο σχολείο έρχονται σε διάσταση τα Μαθηματικά με τη Φυσική και συνεπώς δεν οδηγούν στην πολυτεχνική μόρφωση. Κι εδώ έχουμε υπόψη μεταξύ άλλων ότι π.χ. σαν βάση παίρνεται ο “εύκολος” τύπος  $y'$ , αντί του “δυσκολονόητου” λόγου  $dy/dx$  που είναι η ουσία της παραγώγου και ευθέως οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις.<sup>9</sup> Θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι τελευταίες αποτελούν τις ρίζες που συνδέουν τα Μαθηματικά με την πρακτική. Άλλωστε ο λόγος εισαγωγής της έννοιας της παραγώγου στα σχολικά Μαθηματικά ήταν ακριβώς αυτός: να φανεί η πρακτική βάση της επιστήμης. Πρόκειται για μια άμεση σύνδεση με τις πιο πλατιές εφαρμογές διερεύνησης και όχι με εφαρμογές τύπων. Ο λόγος για την αποφυγή της σχέσης  $dy/dx$  είναι ότι αυτή κρύβει μέσα της τη διαλεκτική του περάσματος από την Άλγεβρα στην Ανάλυση, από τα στοιχειώδη Μαθηματικά στα ανώτερα.<sup>10</sup> Και βέβαια η διαλεκτική είναι φαινόμενο που σπανίζει στα σχολικά Μαθηματικά (μόνο;).

Το τελευταίο παράδειγμά μας, αλλά όχι μόνο αυτό, φανερώνει μια ουσιαστική πτυχή της ΠΜ: η εφαρμογή της υλιστικής διαλεκτικής στα σχολικά Μαθηματικά είναι η προϋπόθεση για τον πολυτεχνικό προσανατολισμό τους.

Με την απόκτηση της γενικής-πολυτεχνικής μόρφωσης ως επιστημονικής υποδομής του κάθε εργαζόμενου, ο απόφοιτος του βασικού

υποχρεωτικού σχολείου είναι έτοιμος για μια ψηλού επιπέδου επαγγελματική μόρφωση σε οποιονδήποτε τομέα της παραγωγής. Αυτή ακριβώς είναι η προϋπόθεση για την ολόπλευρη ανάπτυξη του κάθε ανθρώπου κι αυτό το σκοπό μπορεί να υπηρετήσει μόνο ένα **Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό Υποχρεωτικό σχολείο**. Να τονίσουμε ότι μπορεί να τον πετυχαίνει όχι με μια τεχνοκρατικά αντιλαμβανόμενη “πολυτεχνική” εκπαίδευση, αλλά πάντα μέσα από συλλογική και ενεργητική ηθική αγωγή που κοινωνικοοικονομικές σχέσεις, απαλλαγμένες από την κάθε είδους καταπίεση του ανθρώπου, θ' απαιτούν. Να γιατί λοιπόν η σημερινή επαγγελματική εκπαίδευση (ΤΕΕ κ.α.) κρίνεται ως υποβαθμισμένη (δεν αναφερόμαστε σε άλλες πλευρές της υποβάθμισης). Δεν έχει την επιστημονική (και όχι μόνο την υλικοτεχνική) υποδομή που απαιτεί η σύγχρονη παραγωγή. Εκείνοι που κατέχουν την εξουσία και τα μέσα παραγωγής, μπροστά στα αδιέξοδα που ορθώνει συνεχώς η κρισιακή οικονομία της εκμεταλλευτικής κοινωνίας, ζητούν “επαγγελματική κατάρτιση” εξαρτημένη από τις τρέχουσες “ανάγκες”, όπως θα τις ορίζουν κάθε φορά τα κι ιδιοτελή συμφέροντά τους. Και το ζήτημα δεν είναι τεχνοκρατικό, αλλά πολιτικό και ιδεολογικό, είναι ζήτημα διαμόρφωσης του ανθρώπου, των πνευματικών και φυσικών ικανοτήτων της προσωπικότητας με τελική έκφρασή της στην ηθική και ψυχολογική κατάσταση της.

Θα έχουν δίκαιο εκείνοι που θα συμπεραίνουν από τα παραπάνω ότι η ολοκληρωμένη παιδαγωγική εκπαιδευτική διαδικασία απαιτεί πριν απ' όλα την κοινωνικοποίηση των μέσων παραγωγής ώστε να επιτραπεί η σύνδεση του σχολείου με την παραγωγή, όπως την οραματίζονταν ο Κ. Μαρξ. Αυτό είναι και το ζητούμενο! Να συμπληρωθεί: και σχεδιασμένη οικονομία. Μόνο οι δύο αυτές προϋποθέσεις μαζί θα επιτρέψουν μια νέα κοινωνική οργάνωση της εργασίας που θα κάνει πέρα για πέρα πράξη τη σημερινή αναγκαιότητα για γενική πολυτεχνική εκπαίδευση. Πολιτικός όρος για μια τέτοια εξέλιξη του σχολείου είναι η λαϊκή εξουσία, η διαρκής, ανυποχώρητη, συνειδητή κι οργανωμένη δράση των ίδιων των εργαζόμενων για τα δικά τους ταξικά συμφέροντα, και μόνο αυτό είναι πραγματικό όφελος για την ανθρωπότητα. Να τι μας δίδαξε η οικοδόμηση του σοσιαλισμού του ΧΧ αιώνα.

## Η μεθοδολογική μόρφωση του Μαθηματικού

Η επιγραμματική και επιλεγμένη θεώρηση που έχουμε κάνει για τη σχέση των Μαθηματικών με τον πολυτεχνικό χαρακτήρα του αναγκαίου Ενιαίου Βασικού σχολείου αποτελεί κατά κάποιο τρόπο τον οδηγό για το τι είδους μαθηματικό-παιδαγωγό χρειαζόμαστε. Είναι αυτονόητο πως η ίδια η παιδαγωγική εκπαίδευση του Μαθηματικού θα πρέπει να αντιστοιχεί στο σκοπό για τον οποίο προορίζεται. Πριν απ' όλα θα πρέπει να γνωρίζει την ουσία όλων των κύριων τομέων της κοινωνικής παραγωγής. Τους κλάδους της επιστήμης που σχετίζονται με την παραγωγή πρέπει να τους γνωρίζει από τη σκοπιά της σύνδεσής τους με τα Μαθηματικά. Κάτι τέτοιο όμως είναι δυνατό μόνο εάν γνωρίζει πολύ καλά το σύγχρονο αντικείμενο και τη δομή των Μαθηματικών.<sup>11</sup> Είναι γνωστό πως το αντικείμενο των Μαθηματικών, όπως και κάθε επιστήμης, βρίσκεται σε συνεχή ιστορική και οντολογική ανάπτυξη. Συγχρόνως διατηρείται η ουσία του αντικειμένου που αποτυπώνεται στον ορισμό του και που αντανάκλα το ιστορικό επίπεδο ανάπτυξής του.

Ο κλασικός ορισμός του αντικειμένου των Μαθηματικών δόθηκε



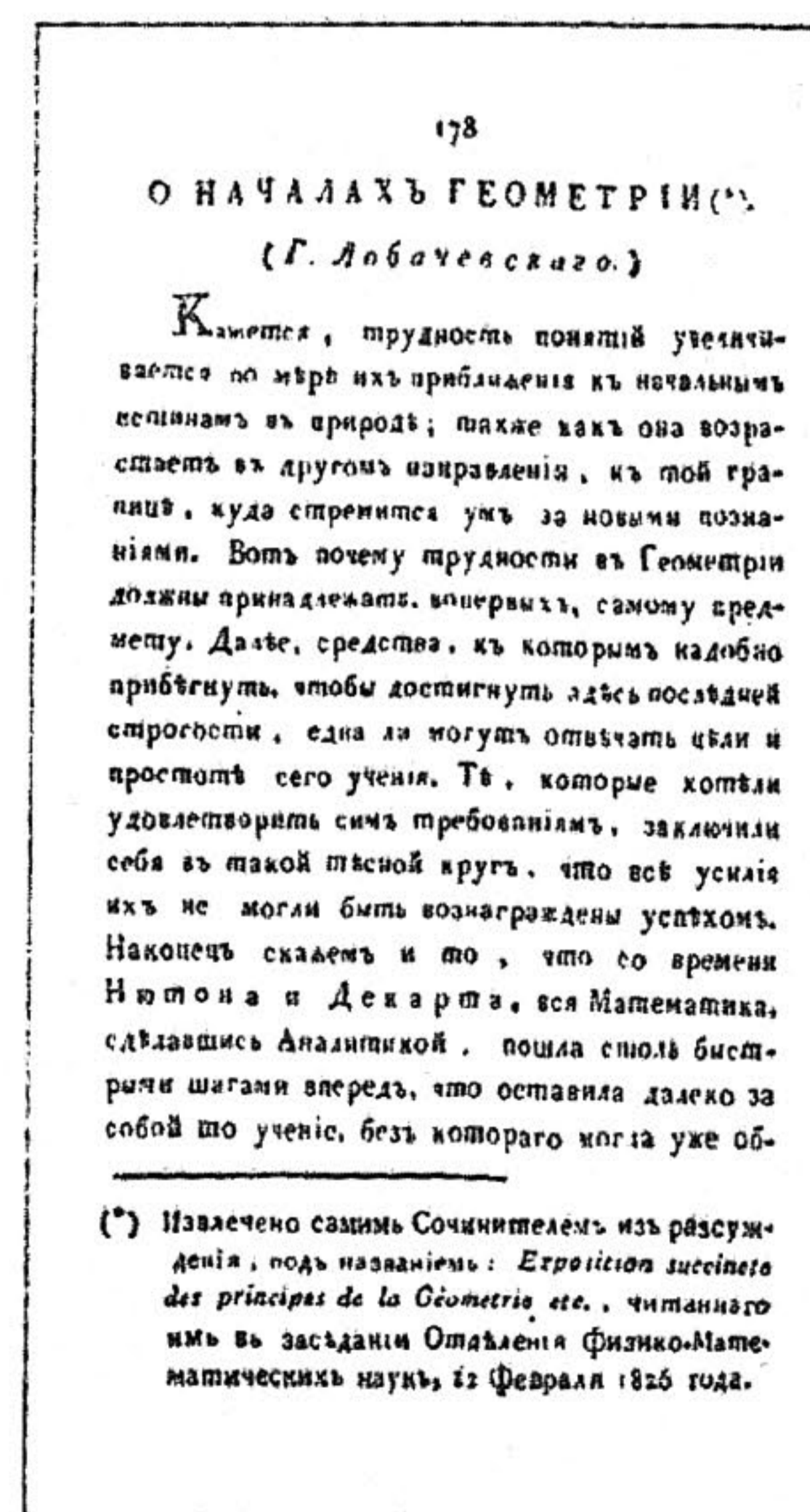
από τον Φ.Ένγκελς ως εξής: «*Τα καθαρά Μαθηματικά έχουν για αντικείμενό τους τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου, συνεπώς ένα καθ' όλα υλικό της πραγματικότητας... Όμως για να μπορέσουμε να εξετάσουμε τις μορφές και τις σχέσεις αυτές στην καθαρότητά τους, πρέπει να τις χωρίσουμε τελείως από το περιεχόμενό τους ... Όπως και όλες οι άλλες οι επιστήμες, τα Μαθηματικά έχουν δημιουργηθεί από τις πρακτικές ανάγκες των ανθρώπων: από τη μέτρηση του εδάφους και του περιεχομένου δοχείων, από τη χρονολογία και τη μηχανική.*»<sup>12</sup> Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο ορισμός του Φ.Ένγκελς αφορούσε τα κλασικά Μαθηματικά, όπως αυτά είχαν διαμορφωθεί κυρίως μέχρι τα μέσα του ΧΙΧ αιώνα, η σημερινή κατάσταση της επιστήμης επιβεβαιώνοντας τον ορισμό αυτό επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι τα σύγχρονα Μαθηματικά έχουν για αντικείμενό τους **ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΟΣΜΟΥ: ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ, ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ, ΑΠΟ ΤΗ ΣΚΟΠΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΜΟΡΦΙΑΣ ΤΟΥΣ<sup>13</sup> ΜΕ ΤΙΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΑΙ ΤΙΣ ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.**<sup>14</sup>

Αυτή ακριβώς η ισομορφία που ανακαλύπτουν τα Μαθηματικά στον πολύμορφο πραγματικό κόσμο δίνει και την απάντηση στη γνωστή απορία των γάλλων μαθηματικών της ομάδας Ν. Μπουρμπακή και των οπαδών τους για το πώς είναι δυνατόν τα τόσο αφηρημένα Μαθηματικά να έχουν τόσο σπουδαίες και αναρίθμητες εφαρμογές σε όλους τους τομείς της πραγματικότητας. Εξ αυτού, δηλαδή από την εξ αντικειμένου σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα, και ο πολυτεχνικός χαρακτήρας τους. Κάθε αλλοίωση του χαρακτήρα αυτού (βλ. Π.χ. θετικισμός) οδηγεί στη μη επιστημονικότητα της μαθηματικής γνώσης και εκπαίδευσης (σχολικής και πανεπιστημιακής) και, μέσω αυτής, σε αρνητικές κοινωνικές συνέπειες. Μάλιστα, ο μέγας Ρώσος γεωμέτρης και επαναστάτης της επιστήμης, ο Ν.Ι. Λομπατσέφσκι (1792 – 1856), απόδειξε με το ίδιο το επιστημονικό έργο του ότι τα Μαθηματικά ποτέ δεν αναπτύσσονταν μέσω της παραγωγικής (αξιωματικής) μεθόδου, αλλά μόνο μέσα από τη διερεύνηση της σύνδεσής τους με την αντικειμενική πραγματικότητα.

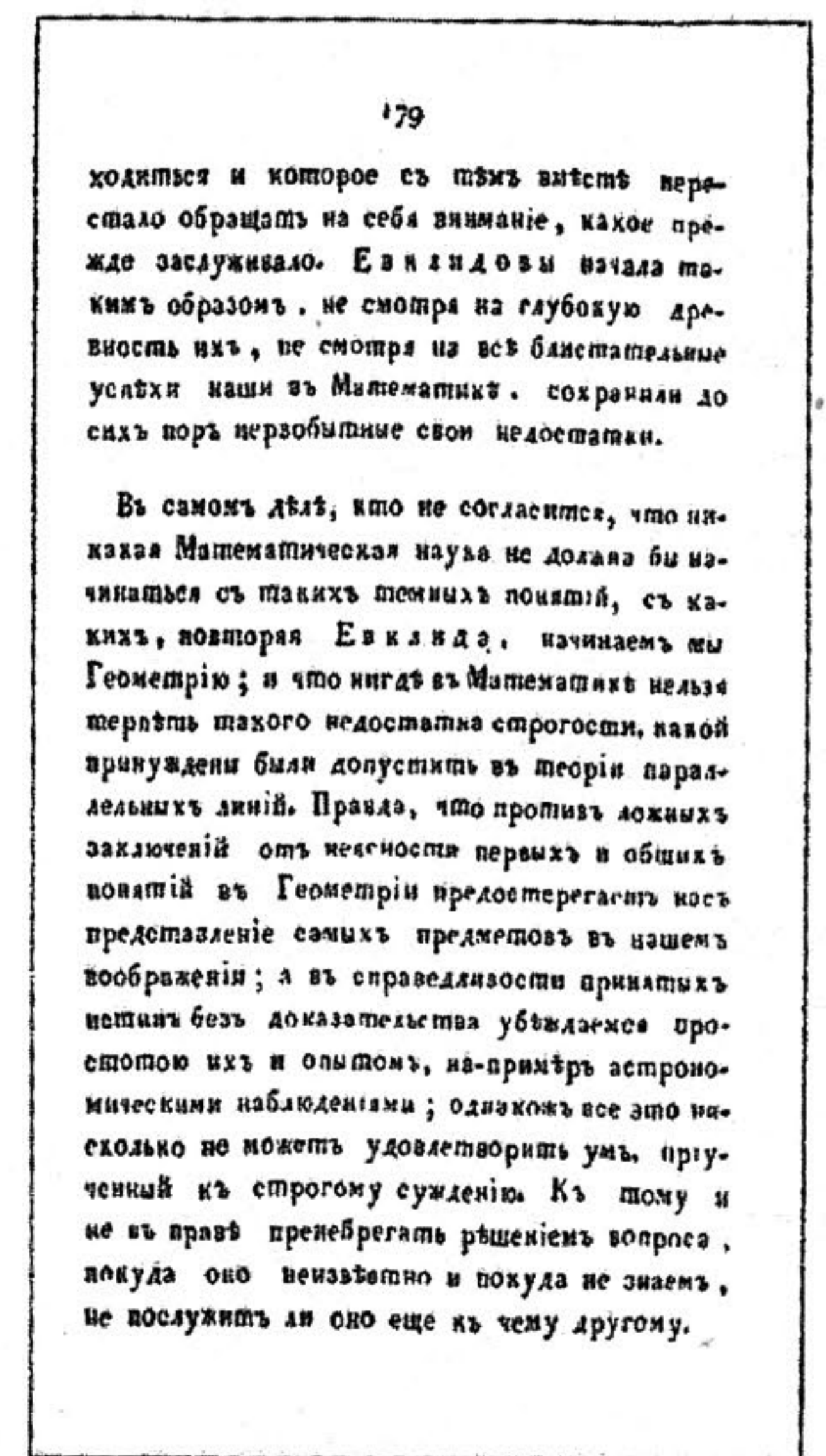


Ο Ν.Ι. Λομπατσέφσκι αρνήθηκε το αξίωμα των παραλλήλων (του Ευκλείδη), δηλαδή αρνήθηκε να εξαγάγει με την παραγωγική μέθοδο τα όποια συμπεράσματα με βάση το αξίωμα αυτό. Έτσι για πρώτη φορά στην ιστορία εκθέτει ολοκληρωμένα μια νέα γεωμετρία (την απόλυτη γεωμετρία). Το πανεπιστήμιο του Καζάν, όπου εργαζόταν, δεν δημοσίευσε αυτό το έργο του («Γεωμετρία», 1823). Στη συνέχεια προχωράει στην «άρ-

νηση της ίδιας της άρνησής» του και τοποθετεί στην απόλυτη γεωμετρία τώρα πια δικό του αξίωμα, αντίθετο προς αυτό του Ευκλείδη. Έτσι δημιουργεί τη δική του μη-ευκλείδεια γεωμετρία (23 Φλεβάρη, 1826). Η ανατροπή έγινε! Από τη στιγμή αυτή αρχίζει η εποχή των σύγχρονων Μαθηματικών. Όμως η αναγνώριση της επανάστασης των Μαθηματικών (Π. Ράμους, Ζ. Νταλαμπέρ, Γιάνος Μπόλυαϊ, Κ. Γκάους, Ν. Λομπατσέφσκι) χρειάστηκε αγώνα πολλών δεκαετιών (Ε. Μπελτραμή, Μπ. Ρήμαν, Α. Αϊνστάιν) σε συνθήκες επαναστατημένων κοινωνιών (με το πέρασμα από την οικονομία της φάμπρικας στην οικονομία των μονοπωλίων και από την τεχνολογία του ατμού στην τεχνολογία του ατόμου, με την ανάδειξη του προλεταριάτου σε νέο φορέα και πρωταγωνιστή της ιστορίας). Βλέπουμε λοιπόν ότι η Γεωμετρία, και γενικότερα τα Μαθηματικά, δεν αναπτύχθηκαν σε κάποια παραλία της Μεσογείου με τη μαγεία της αξιωματικής μεθόδου. Αναπτύχθηκαν μέσα από αντιθέσεις στην ίδια την αξιωματική μέθοδο, υπακούοντας στο νόμο της διαλεκτικής λογικής, στον νόμο της άρνησης της άρνησης. Είναι ο διαφορετικός δρόμος του Ν. Λομπατσέφσκι, για το έργο του οποίου ο κοινωνικά συμβιβασμένος «*βασιλιάς των Μαθηματικών*» Κ. Γκάους, σε γράμμα του (1846) είπε υπονοώντας, όπως συνήθιζε: «...*όλα αυτά αναπτύχθηκαν από τον Λομπατσέφσκι με μαστοριά και σε καθαρά γεωμετρικό πνεύμα, αν και από άλλο δρόμο σε σχέση μ' αυτόν που πήγαινα εγώ*». (Υπογράμμιση δική μας – Κ.Φ.) Η επιλογή αυτού του άλλου δρόμου από τον Ν. Λομπατσέφσκι δεν ήταν προϊόν θείας έμπνευσης, αλλά καρπός επιστημονικής κατανόησης της εμπειρίας 2.000 ετών για το ρόλο και τη θέση της παραγωγικής μεθόδου στο μεγαλειώδες συγκρότημα της μαθηματικής γνώσης. Το μαρτυρούν οι πρώτες σελίδες του αθάνατου έργου του και που έχουμε την τιμή να τις παραθέσουμε στην παρακάτω εικόνα.



Πρώτη σελίδα του έργου του Λομπατσέφσκι «Περί των στοιχείων της γεωμετρίας» (1823).



«Ο αρχαίος γεωμετρίας» (1823).

Οι πρώτες σελίδες από το έργο του Λομπατσέφσκι «Περί των στοιχείων της γεωμετρίας» (1823). Τις παραθέτουμε σε δική μας άμεση μετάφραση που, απ' ό τι γνωρίζουμε, στην Ελλάδα



## Π Ε Ρ Ι Τ Ω Ν Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν Τ Η Σ Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ (\*)

(του κ. Λομπατσέφσκι)

Θαρρώ πως η δυσκολία των εννοιών αυξάνεται στο βαθμό που πλησιάζουν τις αρχικές αλήθειες της φύσης, το ίδιο όπως αυτή αυξάνεται σε αντίθετη κατεύθυνση, σ' εκείνο το όριο, όπου ωθείται το μυαλό για νέες γνώσεις. Να γιατί οι δυσκολίες στη Γεωμετρία θα πρέπει να ανήκουν, πριν απ' όλα, στο ίδιο το αντικείμενό της. Ακόμα και τα μέσα, στα οποία θα πρέπει να ανατρέξουμε για να επιτευχθεί εδώ η τελική αυστηρότητα, ζήτημα είναι αν μπορούν να ανταποκρίνονται στο σκοπό και την απλότητα αυτής της διδασκαλίας. Εκείνοι οι οποίοι ήθελαν να ικανοποιήσουν αυτές τις απαιτήσεις, έκλεισαν τον εαυτό τους σε τόσο στενό κύκλο, ώστε όλες οι προσπάθειές τους δεν μπορούσαν να ανταμειφθούν με επιτυχία. Τέλος, να πούμε και αυτό, ότι από τον καιρό του Νεύτωνα και του Ντεκάρτ, ολόκληρα τα Μαθηματικά, αφού έγιναν Αναλυτική, πήγαν με τόσο γοργά βήματα μπροστά, ώστε άφησαν πολύ πίσω τους τη διδασκαλία, χωρίς την οποία μπορούσε πια να αυτοεξυπηρετηθεί και η οποία συνάμα έπαψε να τραβάει την προσοχή, την οποία προηγουμένως άξιζε. Κατά τον τρόπο αυτό τα Στοιχεία του Ευκλείδη, παρά τη βαθιά αρχαιότητά τους, παρά τις εκθαμβωτικές επιτυχίες μας στα Μαθηματικά, διατήρησαν μέχρι τώρα τις πρωτόγονες ατέλειές τους.

Πράγματι ποιος δεν θα συμφωνήσει ότι καμιά Μαθηματική επιστήμη δεν πρέπει να αρχίζει από τέτοιες σκοτεινές έννοιες, σαν κι αυτές με τις οποίες επαναλαμβάνοντας τον Ευκλείδη αρχίζουμε εμείς τη Γεωμετρία, και ότι πουθενά στα Μαθηματικά δεν πρέπει να ανεχόμαστε τέτοια έλλειψη αυστηρότητας, σαν κι αυτήν που αναγκαζόμαστε να επιτρέπουμε στη θεωρία των παράλληλων γραμμών. Είναι αλήθεια ότι ενάντια σε λανθασμένα συμπεράσματα από την ασάφεια των πρώτων και κοινών εννοιών στη Γεωμετρία μάς προφυλάσσει η παράσταση των ίδιων των αντικειμένων στη φαντασία μας, ενώ για την ορθότητα των αποδεκτών χωρίς απόδειξη αληθειών πειθόμαστε με την απλότητά τους και την εμπειρία, για παράδειγμα με αστρονομικές παρατηρήσεις. Εντούτοις όλα αυτά δεν μπορούν καθόλου να ικανοποιήσουν το μυαλό, το μαθημένο σε αυστηρό συλλογισμό. Επιπλέον δεν δικαιούται να περιφρονεί την επίλυση του ζητήματος, αφού είναι άγνωστο και αφού δεν γνωρίζουμε αν θα μας χρησιμεύσει για τίποτε άλλο.

(\*) Το εξήγαγε ο ίδιος ο Συντάκτης από τους συλλογισμούς με την ονομασία «Exposition succincto des principes de la Geometrie etc», αναγνωσμένους από τον ίδιο στη συνεδρίαση του τμήματος των Φυσικο-Μαθηματικών επιστημών, 12 Φλεβάρη του έτους 1826.

αποδίδεται για πρώτη φορά.

Μετά από την αναφορά μας αυτή στη μεγάλη στιγμή των Μαθηματικών γίνεται φανερό ακόμα και για τον πιο κακόπιστο ότι ο Ν.Ι. Λομπατσέφσκι δεν αποδείκνυε τη Γεωμετρία με την παραγωγική μέθοδο, αλλά με τη Γεωμετρία αποδείκνυε την πραγματικότητα. Με τις μαθηματικές μεθόδους προσπαθούσε να διεισδύσει στην ουσία των φυσικών φαινομένων. Η ίδια η πραγματικότητα στην κοινωνική και την επιστημονική της διάσταση επαλήθευσε τη Γεωμετρία του.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η **ανάπτυξη των Μαθηματικών είναι σε τελική ανάλυση κοινωνικό πρόβλημα**. Εξαρτάται από το κατά πόσο η δοσμένη κοινωνία θέτει ή όχι φραγμό στην επικοινωνία της μαθηματικής επιστήμης με την πραγματικότητα. Η αγνόηση αυτού του γεγονότος από μαθηματικό σημαίνει πως ο πολυτεχνικός οριζοντάς του οροθετείται από ένα σημείο και μόνο. Η επιστημονικότητά του είναι επιφανειακή, δηλαδή αμφίβολη. Επίσης να σημειωθεί ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα από την υπόθεση του Λομπατσέφσκι. Η γνώση του αντικειμένου καθόρισε τη μέθοδό του. Δηλαδή η αντικειμενική πραγματικότητα καθορίζει το περιεχόμενο της επιστήμης. Αλλιώς, μπορούμε να πούμε ότι τα Μαθηματικά, όπως και κάθε επιστήμη, αντανakλούν την αντικειμενική πραγματικότητα. Ο βαθμός αυτής της αντανάκλασης εκφράζεται στην εξέλιξη του ορισμού του αντικειμένου.

Τη δυνατότητα εξέλιξης του ορισμού του αντικειμένου των Μαθηματικών επιτρέπει ή, σωστότερα, την προνοεί ο Φ. Ένγκελς. Συγκεκριμένα, ισχυριζόμενος πως τα Μαθηματικά δεν μπορούν να αναπτύσσονται ατέρμονα με την παραγωγική μόνο μέθοδο, δηλαδή ότι τα **Μαθηματικά δεν είναι καθαρά παραγωγική επιστήμη**, ο Φ. Ένγκελς επικαλείται τις ποσοτικές σχέσεις και τις μορφές του χώρου σαν γενικές σχέσεις και μορφές της πραγματικότητας, και μάλιστα αναπόσπαστες από τον υλικό τους φορέα. Έτσι, αφού παραθέτει ο Φ. Ένγκελς τον ισχυρισμό του Ντίρινγκ πως οι έννοιες του αριθμού και του σχήματος είναι το «**αντικείμενο που είναι επαρκές για τα μαθηματικά**» δίνει την εξής αποστο-

μωτική απάντηση, που ηχεί και μέχρι σήμερα:

«... ο κύριος Ντίρινγκ νομίζει ότι από τα μαθηματικά αξιώματα ... μπορεί να παραγάγει και μετά να εφαρμόσει στον κόσμο όλα τα καθαρά Μαθηματικά χωρίς να προσθέσει τίποτα από την εμπειρία ... Τα αξιώματα αυτά ανάγονται σε δύο:

1. Το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος του. [Η κβαντική μηχανική αποδεικνύει το αντίθετο. Οπότε, σωστά ο Φ. Ένγκελς επισημαίνει ότι εδώ πρόκειται για ταυτολογία.- Φ.] ...
2. Αν δυο μεγέθη είναι ίσα μ' ένα τρίτο, τότε είναι ίσα και μεταξύ τους...

Για να προχωρήσουμε πρέπει να εμπλέξουμε πραγματικές σχέσεις, σχέσεις και χωρικές μορφές, οι οποίες παίρνονται από πραγματικά σώματα.»<sup>15</sup>

Σε τελειώς αντίθετη κατεύθυνση από το γράμμα και το πνεύμα του Φ. Ένγκελς και του Λομπατσέφσκι κινείται, για παράδειγμα, το σχολικό μας βιβλίο της Γεωμετρίας.<sup>16</sup>

Στη σελίδα 10, μετά από 8 σελίδες ιστορικής και σοφιστικής περιπέτειας, γίνεται απεγνωσμένη προσπάθεια να **ξεμπλέξουν** οι πραγματικές σχέσεις, δηλαδή η Πρακτική Γεωμετρία, από τα αξιώματα τις λεγόμενης Θεωρητικής Γεωμετρίας. Και τούτο παρά τη φιλοσοφική και παιδαγωγική αναγκαιότητα να ενώσουν τη Θεωρητική με την Πρακτική Γεωμετρία. Άλλωστε αυτός είναι και ο γνωστικός ρόλος των αξιωμάτων στη θέση του θεμέλιου ενός λογικού συγκροτήματος που λέγεται Γεωμετρία. «**Βέβαια, η καθαρή λογική δεν μπορεί να μας δώσει αυτό το θεμέλιο**», λέει ο Φ. Κλάιν.<sup>17</sup>

Τη δική τους ανικανότητα να λύσουν το πρόβλημα των αξιωμάτων, οι συγγραφείς τη μεταφέρουν στην ανώτερα οργανωμένη ύλη, δηλαδή στο μυαλό, επειδή, λένε, «**έχουμε από την Πρακτική Γεωμετρία προσλαμβάνουσες παραστάσεις**». Δηλαδή θα μπορούσε να συμβεί το αντίθετο; Μπορούμε χωρίς αυτές τις παραστάσεις να έχουμε δεδομένα για ιδεατές (αποσπασμένες από κάθε περιεχόμενο) έννοιες του χώρου



όπως “σημείο” και “ευθεία”; Δηλαδή έννοιες χωρίς παραστάσεις; Τι λέει γι’ αυτό το πράγμα ο Λομπατσέφσκι; Δεν φτάνει οι συγγραφείς που δεν είχαν μπροστά τους το κείμενο του μεγάλου αυτού ανθρώπου. Έχουν όμως μεγάλη ευθύνη ότι αυτοί και οι προγενέστεροί τους δεν το αναζήτησαν εδώ και 180 χρόνια. Αλλά ακόμα και μ’ αυτήν την παράλειψη (!) θα μπορούσαν να συμβουλευτούν τον μέγα μεταρρυθμιστή των σχολικών Μαθηματικών Φ. Κλάιν. Ο τελευταίος, επιβεβαιώνοντας τον Φ. Ένγκελς, έστω και από την άποψη του σενσουαλιστή (=αισθησιοκράτη) ορίζει με τη σαφήνεια που τον διακρίνει: «*Όμως αναμφισβήτητα παρά ταύτα παραμένει η δυνατότητα να εξετάζουμε το αξίωμα των παραλλήλων σαν μια τέτοια παραδοχή, που επιτρέπει με τον πιο απλό τρόπο να εικονίζουμε τις πραγματικές χωρικές σχέσεις. Αυτό μας οδηγεί στην εξής γενική θέση: Οι βασικές έννοιες και τα αξιώματα αποτελούν όχι απλά μόνο δεδομένα της διαίσθησης, αλλά σκόπιμα επιλεγμένες ιδεοκατασκευές αυτών των δεδομένων. Ήδη η σαφώς οροθετημένη έννοια του σημείου δεν υπάρχει στην άμεση αισθησιακή αντίληψη (διαίσθηση) ... τα αξιώματα της γεωμετρίας παριστάνουν, κατά τη γνώμη μου, όχι αυθαίρετους, αλλά συλλογισμούς του μυαλού που προκλήθηκαν γενικά από τη θεώρηση του χώρου και που ρυθμίζονται στις λεπτομέρειές τους από λόγους σκοπιμότητας.*»<sup>18</sup> (υπογράμμιση δική μας – Κ.Φ.) Αλλά ούτε αυτό ικανοποιεί τους συγγραφείς μας, γιατί η αναφορά τους στην εμπειρική προέλευση των αξιωμάτων είναι φορμαλιστική, για τον τύπο.

Με λίγα λόγια, δεν φταίει το αυτονόητο των παραστάσεων, όπως ισχυρίζονται οι συγγραφείς μας, αλλά η μη ικανότητα να χρησιμοποιηθεί αυτό το αυτονόητο, ώστε να τεθεί στην υπηρεσία (στα θεμέλια) μιας μαθηματικής θεωρίας. Έτσι, στο βιβλίο καταρχήν, εισάγονται εκσυγχρονισμένα τα πελώρια και μακροχρόνια διδακτικά προβλήματα των σχολικών Μαθηματικών: της θεωρητικής εικόνας τους και του εξωπραγματικού (αφηρημένου) περιεχομένου τους, του φορμαλισμού και της ασκησιολογίας, των τεχνητών διδακτικών ακροβατισμών και της αξιολογικής (εξεταστικής) μανίας. Ίδου το πλούσιο έδαφος για επιχειρηματική παιδεία: φροντιστήρια, σχολεία, πανεπιστήμια, σεμινάρια κατάρτισης, ΑΣΕ-Πτζιδικα κ.ο.κ. Ενώ συγχρόνως καλλιεργούνται ψευδοπροβλήματα γύρω από το «*Τι να διδάξουμε*», όπως π.χ. «*Να μείνει ή να φύγει ο Ευκλείδης από το σχολείο*;».

Είδαμε λοιπόν τις πηγές της κατεύθυνσης της παραδοσιακής ΠΜ στη σημερινή “εκσυγχρονιστική” της εκδοχή: την αντικοινωνικότητα και την αντεπιστημονικότητα. Το ζήτημα δεν είναι αν οι συγγραφείς και τα υπουργεία, εκπαιδευτικοί και επιστήμονες σκόπιμα ή συνειδητά ακολουθούν την κατεύθυνση αυτή. (Αν και όλοι οι φορείς της παιδείας θα πρέπει να παρέμβουν με την κοινωνική τους και επιστημονική τους ευθύνη, για να σταματήσουν τους ιθύνοντες που εμπορεύονται τη λαϊκή συνείδηση). Το ζήτημα είναι ότι **στη βάση της παραδοσιακής ΠΜ βρίσκεται μια κοινωνικοπολιτική και φιλοσοφική αντίληψη, που αντικειμενικά τη συνιστά αντιλαϊκή**. Συνεπώς, επιβάλλεται η κατανόηση αυτής της πραγματικότητας από κάθε μαθηματικό. Αυτό όμως σημαίνει πως πρέπει να καταχτά μια διαφορετική μεθοδολογική και φιλοσοφική παιδεία. Μια φιλοσοφία επιστημονική και συνάμα αληθινά ανθρωπιστική. Όπως αποδείξαμε πιο πάνω σχετικά με το αντικείμενο των Μαθηματικών και τα θεμέλια της Γεωμετρίας, τέτοια είναι η υλιστική μαρξιστική φιλοσοφία. Τα ζητήματα που παρουσιάσαμε (αντικείμενο, μέθοδο, σχέση αντικειμενικής πραγματικότητας και επιστημονικής γνώσης, επαγγελματική ευθύνη και κοινωνικές συνέπειες κ.ο.κ.) δείχνουν ενδεικτικά το περιεχόμενο της μεθοδολογικής μόρφωσης που απαιτείται σήμερα, περισσότερο από κάθε άλλη φορά, για τον Παιδαγωγό - Μαθηματικό.

Το τσιτάτο του Η. FRAUDENTHAL<sup>19</sup>, που τοποθετήθηκε στην αρχή του άρθρου μας, με αστείο ύφος αλλά με φιλοσοφική σοβαρότητα εκφράζει το πραγματικό νόημα του αντικειμένου των Μαθηματικών, όπως ορίστηκε από τον Φ. Ένγκελς, και θυμίζει σε κάθε Μαθηματικό της Εκπαίδευσης ότι σκοπός των σχολικών Μαθηματικών, όπως και κάθε επιστήμης και μάλιστα στο σχολείο, είναι η **επιστημονική γνωριμία με την πραγματικότητα** και όχι η μεταφυσική και σχολαστική ενασχόληση με αποδεικτικές διαδικασίες. Για να εκπληρώνεται αυτός ο σκοπός, δεν αρκεί μόνο η ριζική αλλαγή του σημερινού Αναλυτικού Προγράμματος και των σχολικών βιβλίων. Απαιτείται κυρίως ριζική αλλαγή στην εκπαίδευση του Μαθηματικού-Παιδαγωγού με προσανατολισμό στις πραγματικές ανάγκες της κοινωνίας και όχι με τον προσανατολισμό των ΑΕΙ στις επιχειρηματικές ορέξεις της πλουτοκρατίας. Με προσανατολισμό στην ουσιαστική μαθηματική γνώση και σοβαρή ιστορικο-φιλοσοφική υποδομή του Μαθηματικού-Παιδαγωγού, γιατί «... χωρίς αξιολογική φιλοσοφική θεμελίωση καμιά θετική επιστήμη, κανένας υλισμός δεν μπορεί να αντέξει την πάλη ενάντια στην πίεση των αστικών ιδεών και την παλινόρθωση της αστικής κοσμοαντίληψης».<sup>20</sup>

## Επαγγελματική εκπαίδευση του εκπαιδευτικού εναρμονισμένη με τις ανάγκες της λαϊκής ΠΜ

Ο αναπροσανατολισμός του σχολείου στο νέο σκοπό, την ολόπλευρη διαμόρφωση της προσωπικότητας απαιτεί νέο παιδαγωγικό περιβάλλον και νέες, παιδαγωγικές λειτουργίες του ίδιου του μαθηματικού. Πριν απ’ όλα χρειάζεται να επικρατεί πνεύμα συνεργασίας στο παιδαγωγικό έργο, από την οργάνωση του μαθήματος μέχρι και τη διδακτική έρευνα. Η συλλογικότητα της εργασίας μεταξύ συναδέλφων, εξυπηρετώντας τις πρακτικές ανάγκες τις παιδαγωγικής φιλοσοφίας του σχολείου, πρέπει ν’ αντικαταστήσει την υπαλληλική ρουτίνα που επικρατεί σήμερα.

Πρόκειται για μια άλλη διάσταση στην ανάπτυξη του επαγγέλματος του παιδαγωγού.

Όλα τα παραπάνω απαιτούν και από την κοινωνία να οργανώσει την ανάλογη εκπαίδευση του Μαθηματικού - Παιδαγωγού. Σαν πυρήνας για την επαγγελματική εκπαίδευσή του θα μπορούσε να είναι ο ορισμός της ΠΜ που δώσαμε πιο πάνω. Ο ορισμός αυτός είναι πλήρης, αν δεχτούμε το κριτήριο πληρότητας, που είχε προτείνει γενικά για συστήματα επιστημών ο κορυφαίος σοβιετικός φιλόσοφος και χημικός Μπ. Μ. Κεντρόφ.<sup>21</sup> Η πρότασή του συνίσταται στο ότι ένα σύστημα επιστημών είναι πλήρες όταν απαντάει στα τρία ερωτήματα: «*Τι*;» (το αντικείμενο, το περιεχόμενο της επιστήμης), «*ΠΩΣ*;» (μέθοδος, αντανάκλαση του αντικειμένου στη συνείδηση) και «*ΓΙΑΤΙ*;» (καθορισμός στόχου, πρακτική). Στην περίπτωση μας, κατά τη σειρά των ερωτήσεων, ανταποκρίνονται σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα οι επιστήμες: *Μαθηματικά, Ψυχολογία και Παιδαγωγική*. Η συγκεκριμένη έκφραση της αλληλουχίας των επιστημών αυτών εστιάζεται στο αντικείμενο των Μαθηματικών. Το συμπέρασμα είναι πως ο Μαθηματικός - Παιδαγωγός (όπως και κάθε μαθηματικός) θα πρέπει να γνωρίζει ότι τα **Μαθηματικά έχουν αντικείμενο**, σ’ αντίθεση με την κυριαρχούσα αντίληψη ότι δεν έχουν αντικείμενο και είναι μόνο μια μέθοδο αποδεικτικής διαδικασίας (η φιλοσοφία των φροντιστηρίων αλλά και των πανεπιστημίων μας, όπου εδρεύει η σχολαστική επιστήμη) ή, το άλλο άκρο, μια μηχανοποιημένη μέθοδο εκτελεστικών αλγοριθμικών διαδικασιών σύμφωνα με τους νεωτερισμούς των κομπιούτερ. Το αντικείμενο αυτό, αφού βρει την αντανάκλαση στην εκπαιδευτική διαδικασία με τη βοήθεια της Διδακτικής των Μαθηματικών, θα τροφοδοτήσει το περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών. Συγχρό-



ως θα ορίσει τη μόρφωση του μαθητή μέσα από την ανάπτυξη της δραστηριότητας με ειδικό τρόπο που θα υποδείξει η Ψυχολογία, ώστε να αποκτά ιδιότητες **μαθηματικής δραστηριότητας**. Η τελευταία όμως θα έχει κατεύθυνση συγκεκριμένη για κάθε παιδί, σύμφωνη με τον επιμέρους παιδαγωγικό στόχο του σχολείου και το γενικό παιδαγωγικό αίτημα της κοινωνίας, που πρέπει να είναι η ολόπλευρα αρμονικά αναπτυγμένη **προσωπικότητα**. Η συμφωνία και η συνάρτηση όλων αυτών των στόχων, η επεξεργασία τους με αντικείμενο την προσωπικότητα, αποτελεί μέλημα της Παιδαγωγικής.

Εμείς δώσαμε μόνο μια ιδέα της μαρξιστικής προσέγγισης για το είδος του σχολείου που απαιτείται για το λαό σήμερα από τη σκοπιά του Μαθηματικού-Παιδαγωγού και που περιλαμβάνεται σε πολιτική πρόταση που έχει κατατεθεί.<sup>22</sup> Θίξαμε ενδεικτικά τη θέση των Μαθηματικών στο σύστημα της πολυτεχνικής εκπαίδευσης του Ενιαίου Βασικού σχολείου. Το θέμα θέλει ειδική μεθοδολογική διερεύνηση από μαθηματικούς όλων των ειδικοτήτων με κατάλληλη φιλοσοφικο-μεθοδολογική υποδομή. Η πλέρια εφαρμογή της ενιαίας οροθέτησης των σχολικών Μαθηματικών απαιτεί το παιδαγωγικό περιβάλλον που δημιουργούν άλλες κοινωνικές σχέσεις παραγωγής, με την κυριαρχία της εργατικής τάξης, ώστε να μετατραπεί το σχολείο από όργανο ταξικής επιλογής σε χώρο συλλογικής κοινωνικής διαπαιδαγώγησης. Όμως και σήμερα, αν ο Μαθηματικός-Παιδαγωγός μέσα από το μάθημά του και από τη δράση του σε επαγγελματικές ενώσεις αποκαλύπτει συνεχώς την **αναγκαιότητα για πολυτεχνικό προσανατολισμό** του μαθήματός του, τότε εκπληρώνει στο ακέραιο το καθήκον του σαν λαϊκός παιδαγωγός. Αρκεί στη δουλειά του να μη ξεχνάει ότι ο δάσκαλος πρέπει να είναι οδηγός της κοινωνίας. Ο Λένιν γνώριζε όχι μόνο την αγραμματοσύνη του ρώσικου λαού, αλλά και τη μεγάλη δύναμη του παιδαγωγού (ο ίδιος ήταν γιος παιδαγωγού). Έλεγε λοιπόν ακόμα το 1909:

*«Σε οποιοδήποτε σχολείο το ποιο σημαντικό είναι η ιδεολογικοπολιτική κατεύθυνση των διαλέξεων. Από τι καθορίζεται αυτή η κατεύθυνση; Εξολοκλήρου και αποκλειστικά από τη σύνθεση των λεκτόρων. Εσείς πολύ καλά καταλαβαίνετε σύντροφοι, ότι κάθε «έλεγχος», κάθε «καθοδήγηση», οποιαδήποτε προγράμματα, καταστατικά κ.ο.κ., όλα αυτά είναι ένας κενός ήχος σε σχέση με τη σύνθεση των λεκτόρων. Κανένας έλεγχος, κανένα πρόγραμμα κτλ. δεν είναι σε θέση να αλλάξουν εκείνη την κατεύθυνση των διαλέξεων που καθορίζεται από τη σύνθεση των λεκτόρων.»<sup>23</sup>*

## Κοσμοθεωρία και διδακτική πράξη – παιδαγωγικές συνέπειες

Γίνεται κατανοητό πως ένα παιδαγωγικό έργο είναι φορτισμένο και κατευθύνεται από τις φιλοσοφικές αντιλήψεις του παιδαγωγού. Όμως συνηθίζεται να πιστεύεται και σήμερα ακόμη ότι ο Μαθηματικός αποτελεί την εξαίρεση εξ ορισμού. Πρώτα από όλα οποιαδήποτε γνώση αποτελεί αντανάκλαση της κοσμοθεωρίας εκείνου που την κατέχει. Αν διδάσκουμε, π.χ. ότι  $1 + 1 = 2$ , αυτό σημαίνει πως για μας τα Μαθηματικά είναι αξιωματική θεωρία. Αν όμως διδάξουμε ότι  $1 + 1$  μπορεί να είναι και μικρότερο του 2, τότε για μας τα Μαθηματικά είναι φυσική θεωρία και απολύτως συμφωνούν με τη διδασκαλία της ζωής, όπως αυτή εκφράζεται μέσα από τη Χημεία. Πράγματι γνωρίζουμε ότι δεν συμβαίνει πάντοτε ο όγκος του αθροίσματος να ισούται με το άθροισμα των όγκων. Έτσι για παράδειγμα οι οινοποιοί γνωρίζουν πολύ καλά ότι το ανακάτεμα 1 λίτρου οινοπνεύματος με 1 λίτρο νερού μάς δίνει λιγότερο από 2 λίτρα μείγματος, δηλαδή  $1 + 1 < 2$ . Είναι φανερό ότι η αξιωματική (τυπική) λογική δεν είναι σε θέση να αντικαταστήσει τη ζωντανή (διαλε-

κτική) λογική που είναι και η ουσία της επιστημονικότητας των Μαθηματικών. Η αξιωματική λογική είναι απλά και μόνο ένας από τους τρόπους ύπαρξης αυτής της ουσίας (το φορμάρισμά της). Επομένως ο Μαθηματικός –Παιδαγωγός που ακολουθεί την κοσμοθεωρία της αξιωματικής εικόνας των Μαθηματικών, ακολουθεί την παραδοσιακή ΠΜ. Ενώ, αν με την κοσμοθεωρία του ακολουθεί στη διδασκαλία του τη φυσική εικόνα των Μαθηματικών, τότε ανοίγει τον πολυτεχνικό ορίζοντά τους, άρα ακολουθεί τη λαϊκή ΠΜ. Και είναι σαφέστατο ότι η φυσική εικόνα των Μαθηματικών δεν αντιτίθεται στην αξιωματική εικόνα τους. Απλά η πρώτη συμπεριλαμβάνει στον εαυτό της τη δεύτερη ως μερική έκφρασή της. Η σχέση τους είναι σχέση γενικού και ειδικού αντίστοιχα. Οπότε το πρώτο καθορίζει το δεύτερο και όχι το αντίθετο, όπως συμβαίνει σήμερα.

Είναι όμως ατομικό, τεχνοκρατικά επιστημονικό το ζήτημα της κοσμοθεωρίας στη διδασκαλία; Ας το δούμε συγκεκριμένα, έστω με το παράδειγμα της έννοιας της πιθανότητας. Ένας μαθηματικός πρέπει να γνωρίζει τις διάφορες απόψεις για την πιθανότητα; Αν περιοριστεί στο σχολικό βιβλίο αυτό του είναι αρκετό, για να λύσει όλα τα προβλήματα του βιβλίου και άλλα τόσα. Το αποτέλεσμα θα είναι οι μαθητές να μάθουν να λύνουν τις ασκήσεις (;), αλλά να μην ξέρουν αν τα τυχαία γεγονότα έχουν αιτίες ή δεν έχουν.<sup>24</sup> Πώς να ξέρει ο μαθητής ότι από τότε που ο Ρώσος μαθηματικός Α.Α. Μάρκοφ (1856 – 1922) κατασκεύασε τις περίφημες αλυσίδες του, αποκαλύφθηκε γιατί ο «θεός δεν παίζει ζάρια» (Μπλεζ Πασκάλ); Γιατί αποδείχθηκε ότι οι τυχαίες διαδικασίες είναι μια γενικευμένη έκφραση των απλούστερων αιτιοκρατικών νομοτελειών. Επομένως τα φαινόμενα της αντικειμενικής πραγματικότητας δεν χωρίζονται σε τυχαία και αιτιοκρατικά. Αποτελούν μια **ενιαία αντικειμενική πραγματικότητα**, μέσα στην οποία ο θεός απλά δεν έχει λόγο να παίζει ζάρια, αλλά ούτε και λόγο ύπαρξης. Ο άνθρωπος μόνος του «παίζει ζάρια», για να αποκαλύψει τα αίτια που κρατάν τα φαινόμενα ενιαία. Για το σκοπό αυτό επινόησε την έννοια της πιθανότητας. Όπως λέει ο θεμελιωτής της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων, ο Α.Ν. Κολμογκόροφ: «Ως κατηγορία της επιστημονικής γνώσης η έννοια της πιθανότητας αντανάκλα τον ιδιαίτερο τύπο σύνδεσης ανάμεσα σε φαινόμενα που είναι χαρακτηριστικά διαδικασιών μεγάλης κλίμακας. Η έννοια της μαθηματικής πιθανότητας βρίσκεται στη βάση της **ειδικής κλάσης νομοτελειών**, στοχαστικών είτε στατιστικών και αποτελεί έκφραση ποιοτικά ιδιόμορφης σύνδεσης ανάμεσα στο τυχαίο και αναγκαίο.»<sup>25</sup> Αυτή λοιπόν η στερημένη από το θετικιστή μαθηματικό-δάσκαλο επιστημονική γνώση αφήνει κενό στο μυαλό του μαθητή, για να πάρουν τη θέση της η μεταφυσική και ο αγνωστικισμός.

Έχει επιπτώσεις στα παιδιά μια τέτοια κατάσταση; Έστω κάποιος από τα παιδιά συναντάει την εξής σκέψη: «Σήμερα η επιστήμη δε συζητάει για το αναίτιο των τυχαίων φαινομένων. Αυτά τα τυχαία γεγονότα, τα τυχαία φαινόμενα, αυτά επίσης έχουν τις δικές τους αιτίες και υποτάσσονται σε ειδικές νομοτελίες, που συγκαταλέγουν στον εαυτό τους σαν ειδική περίπτωση (ακριβέστερα, σαν οριακή περίπτωση) τις νομοτελίες των αυστηρά αιτιοκρατικών φαινομένων. Με τον τρόπο αυτό η ανθρωπότητα έφτασε σε αντιλήψεις με πιο πλατιά κατανόηση της νομοτελίας και τις αιτιότητας των φαινομένων, σε σχέση μ' αυτό που χαρακτήριζε τον ντετερμινισμό του XIX αι. και των αρχών του XX αι. ...»<sup>26</sup> Πρόκειται για μια εικόνα εντελώς αντίθετη προς αυτήν που διδάχτηκε ο μαθητής. Επειδή όμως, όπως είδαμε πιο πάνω, η αγωγή της σκέψης του μαθητή είναι μεταφυσική, γι' αυτό βρισκόμενος σε αντίφαση θα



πέσει σε πανικό, δηλαδή σε αδιέξοδο. Βέβαια δεν θα τον βοηθήσει ούτε και η συνέχεια του ίδιου αποσπάσματος, που είναι: «Οι στατιστικές αντιλήψεις στη Φυσική έγιναν αναπόφευκτες, μόλις η μοριακή δομή της ύλης κατάκτησε την αναγνώρισή της... Για να γνωρίζει κανείς την κατάσταση ολόκληρης της ολότητας αυτών των σωματιδίων, δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζει την ατομική κίνηση του κάθε σωματιδίου... Η επιτυχία της μοριακής Φυσικής στο ΧΙΧ αι. και τον ΧΧ αι. δεν συνδέεται με την εμφάνιση των αντιλήψεων για τα μόρια (αυτές τις αντιλήψεις τις συναντάμε και στη βαθιά αρχαιότητα), αλλά με το γεγονός ότι άρχισαν να εφαρμόζονται τα Μαθηματικά για τον υπολογισμό της πιθανότητας διάφορων καταστάσεων».<sup>27</sup> Χωρίς αμφιβολία όμως θα ικανοποιήσει τον αγνωστικισμό του μαθητή ο Α. Πουανκαρέ (είναι και αστέρι πρώτου μεγέθους), αφού θα τον διαβεβαιώνει: «Σχεδόν είναι αδύνατο να δώσει κανείς ικανοποιητικό ορισμό της έννοιας της πιθανότητας... Ο λογισμός των πιθανοτήτων αποκαλύπτει αντίφαση στους όρους που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό αυτής της πιθανότητας»<sup>28</sup>, άσχετα κι αν δεν γίνει κατανοητή η ουσία της πρότασης. Ο μαθητής έμαθε να αρέσκειται στην επιφάνεια. Εκείνο που στο τέλος αυτής της ιστορίας αποδείχτηκε είναι στην πραγματικότητα ότι ο δάσκαλος ούτε παιδαγωγός ήταν, γιατί δεν έμαθε τον μαθητή του να σκέφτεται, ούτε μαθηματικός ήταν καλός, γιατί δε γνώριζε τις μεθοδολογικές βάσεις της επιστήμης του, ώστε να κρατήσει την απαιτούμενη στάση και απέναντι στο βιβλίο (και σχολείο), αλλά και να υπερασπιστεί την επιστήμη. Αυτός ο δάσκαλος μάλλον διεκπεραιωτής του Αναλυτικού Προγράμματος και «συμμορφωμένος» υπάλληλος του σημερινού Υπ. Παιδείας ήταν.

Ποια είναι η θέση ενός αληθινού Μαθηματικού-Παιδαγωγού στο παραπάνω ζήτημα; Καταρχήν θα είχε τη βασική μεθοδολογική εκπαίδευση για να έκανε την απαραίτητη αιτιοκρατική προσέγγιση του τυχαίου γεγονότος, ορίζοντας την πιθανότητα όχι βάσει της φυσιοκρατικής (υπαρξιακής, εμπειριστικής) αντίληψης της οριακής συχνότητας αλλά, π.χ., ως μια νέα προσέγγιση της έννοιας του ποσοστού<sup>29</sup>, ανώτερη απ' αυτήν που ο μαθητής γνώρισε προηγούμενα σε αριθμητικό (μεταφυσικό) επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής θα είχε ομαλή παιδαγωγική εξέλιξη και εισαγωγή στις εφαρμογές των πιθανοτήτων, αφού από πριν στις μικρότερες τάξεις θα αποκτούσε την ανάλογη παιδεία με τα κλάσματα. Αυτά όμως μπορούν να συμβούν μόνο στο Δωδεκάχρονο σχολείο, που έχει ενιαία δομή και ενιαίο πρόγραμμα μέχρι την ηλικία που ο νέος άνθρωπος θα έχει αποκτήσει γενική θεώρηση της πραγματικότητας και σε γενικές γραμμές διαμορφώσει την προσωπικότητά του. Πέρα από αυτό απαιτείται ο μαθηματικός-παιδαγωγός να έχει επίγνωση της διαλεκτικής του τυχαίου και αναγκαίου. Ειδικότερα για την περίπτωση μας θα πρέπει να του είναι γνωστή η εξής διαλεκτική ανάλυση του Ένγκελς σχετικά με τον «...ντετερμινισμό που πέρασε στη φυσιογνωσία από το γαλλικό υλισμό και που επιχειρεί να τελειώνει με το τυχαίο με το να το αναίρει γενικά. Σύμφωνα μ' αυτή τη θεώρηση, στη φύση κυριαρχεί μόνο η απλή, η άμεση αναγκαιότητα... Με την αναγκαιότητα αυτού του είδους εμείς πάλι δεν βγαίνουμε ακόμα πέρα από τα όρια της θεολογικής άποψης για τη φύση... Η λεγόμενη αναγκαιότητα παραμένει κενός λόγος, ενώ συνάμα το τυχαίο παραμένει αυτό που ήταν».<sup>30</sup>

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο Μαθηματικός-Παιδαγωγός του Ενιαίου Δωδεκάχρονου Βασικού Υποχρεωτικού σχολείου πρέπει να έχει ο ίδιος γενική επιστημονική θεώρηση της πραγματικότητας, να είναι ο ίδιος σφαιρικά κι αρμονικά αναπτυγμένη προσωπικότητα. Όπως έλεγε ο Κ.

Μαρξ: «ο παιδαγωγός πρέπει να είναι ο ίδιος διαπαιδαγωγημένος». Μια τέτοια προσωπικότητα δεν υπάρχει έτοιμη. Υπάρχει όμως έτοιμος ο άνθρωπος, δηλαδή ο υλικός φορέας που μπορεί γενετικά και είναι προορισμένος ιστορικά να μεταμορφώνεται σε προσωπικότητα μέσα από την αυτοτελή κοινωνική του δράση. Και, όπως έχουμε πει από την αρχή του άρθρου μας, η δραστηριότητα αυτή οδηγεί στη μεταμόρφωση του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος. Συνεπώς οι αυριανές κατάλληλες κοινωνικές συνθήκες για το ζητούμενο λαϊκό σχολείο απαιτούν σήμερα προσωπική προσπάθεια ενταγμένη στο συλλογικό αγώνα. Μέσα σ' αυτή τη συλλογική πάλη δημιουργείται σήμερα κίβλας ο λαϊκός παιδαγωγός, ο εκπαιδευτικός που διακρίνεται με το να χρησιμοποιεί όλα τα επιστημονικά και κοινωνικοπολιτικά μέσα για την επίτευξη της παιδαγωγικής του αποστολής, την ολόπλευρη μόρφωση και κοινωνική διαπαιδαγώγηση όλων των μαθητών του, για την καθιέρωση Ενιαίου Δωδεκάχρονου Βασικού Υποχρεωτικού Σχολείου.

## ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Κατά τη διδασκαλία του Ι.Π. Παύλοφ η δραστηριότητα του ανθρώπου συνδέεται με το ονομαζόμενο δεύτερο, σηματοδοτικό νευρολογικό σύστημα, που χαρακτηρίζει τον ανθρώπινο εγκέφαλο και που λείπει στα ζώα. Η ουσία του συστήματος συνίσταται στο ότι ο άνθρωπος ανταποκρίνεται όχι στη μορφή (ηχητική, γραφική) του λόγου, αλλά στο νόημά του. Το σύστημα του λόγου διαμορφώθηκε ιστορικά με την ανάπτυξη του εγκεφάλου μέσα από την κοινωνική δράση του ανθρώπου. Άρα, εν αρχή δεν είναι ο Λόγος, είναι η κοινωνική δράση. Την ψυχολογική θεωρία της δραστηριότητας την ανέπτυξαν οι σοβιετικοί ψυχολόγοι Α.Ν. Λεόντιεφ, Σ.Λ. Ρουμπενστάιν κ.ά. συνεχιστές τους. Στη βάση της έχουν θέσει τη φιλοσοφική θεωρία της αντανάκλασης που είχε επεξεργαστεί ο Β.Ι. Λένιν. Η αντανάκλαση, ως γενική ιδιότητα της κινούμενης ύλης, σε κάθε φάση της εξέλιξης αποκτά διαφορετικά γνωρίσματα. Τέτοια γνωρίσματα είναι η συμπεριφορά για τα ζώα και η δραστηριότητα για τον άνθρωπο αντίστοιχα.

Η ψυχική αντανάκλαση «Πριν απ' όλα είναι μια ενεργός διαδικασία αλληλεπίδρασης του ανθρώπου με το γύρω κόσμο. Η αντανάκλαση συντελείται μέσω της δραστηριότητας του ανθρώπου, σε συνθήκες πρακτικής επέμβασης του ανθρώπου στη φύση, αλλά και η ίδια είναι μια ιδιόμορφη δραστηριότητα, όχι απλή αποτύπωση της πραγματικότητας, αλλά μια σύνθετη επεξεργασία της». (Β.Α. Κρουτέτσκι, «Ψυχολογία», Μόσχα, εκδ. Προσβεσένιε, 1980, σελ. 12 και 13).

2. Ο γνωστός Λ.Σ. Βυγκότσκι, θεμελιωτής της σοβιετικής Ψυχολογίας και Παιδαγωγικής, κριτίκαρε τις δύο κατευθύνσεις στην Ψυχολογία της Δύσης στη δεκαετία του '30: 1) αυτήν που εξέταζε την ανάπτυξη του ατόμου αποσπασμένη από τη μάθηση (Ζ. Πιαζέ) και 2) αυτήν που ταύτιζε την ανάπτυξη του ατόμου με τη μάθηση (Ε. Θορντάικ). Κατά τη διδασκαλία του Λ.Σ. Βυγκότσκι η μάθηση, βρισκόμενη επικεφαλής της ανάπτυξης, θα πρέπει να λειτουργεί σαν πηγή του νέου για την ανάπτυξη. Βλ. «Μάθηση και ανάπτυξη. Λεξικό Ψυχολογίας». Μόσχα. Εκδ. Παιναγκόκηκα, της Ακαδημίας Παιδαγωγικών Επιστημών της ΕΣΣΔ, 1983.

3. Την προσπάθεια της επίσημης μαθηματικής παιδείας να εμφανιστεί σαν εκουγχρονιστική μπορεί κανείς να τη δει, π.χ. στο «Τα Μαθηματικά στις νέες εκπαιδευτικές συνθήκες», Δ. Καραγεώργος: «Το Ε.Π.Π.Σ., τα Π.Σ., το Δ.Υ. για τα Μαθηματικά της Γ.Ε.», εκδ. ΕΜΕ, 15<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Συνέδριο, 1998, σελ.234.

4. Η αστική ψυχολογία δεν διακρίνει την ανθρώπινη δραστηριότητα από τη συμπεριφορά των ζώων, γιατί οι κοσμοθεωρητικές της αντιλήψεις δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν τους όρους και τις αιτίες της εξέλιξης του κόσμου από τη βιολογική κατάσταση στην κοινωνική, από το απλό στο σύνθετο. Αντίθετα, ανάγει μεταφυσικά, αναίτια, το κοινωνικό στο βιολογικό, το σύνθετο στο απλό. Με λίγα λόγια, απλουστεύει, αντί να συνθέτει. Αποτέλεσμα είναι να περιορίζεται η εξελικτική διαδικασία στην κληρονομικότητα, δηλαδή στο προδιαγεγραμμένο, στο μοιραίο. Έτσι, σύμφωνα με την αστική επιστήμη, το βιολογικό προκαθορίζει σε τελική ανάλυση το κοινωνικό. Ενώ για την υλιστική διαλεκτική η εργασία είναι εκείνο το ΑΛΜΑ της εξέλιξης, όπου το κοινωνικό επιβάλλεται στο βιολογικό και του δίνει νέα ποιοτικά χαρακτηριστικά, συνιστώντας την ιδιόμορφη ανάπτυξη του ανθρώπινου είδους. Μόνον έτσι έχουν λόγο ύπαρξης οι επιστήμες της Ψυχολογίας και της Αγωγής δίπλα στη Βιολογία.



5. Από την εποχή του Διαφωτισμού ο ορθολογισμός επέβαλε την ταύτιση της αγωγής με τη μάθηση. Είναι η περίοδος που δημιουργήθηκε από την ανερχόμενη αστική τάξη το «*σχολείο των γνώσεων*». Πρόκειται για μια ιστορικά προοδευτική λογική αντίδραση στο προηγούμενο «*θεολογικό σχολείο*» του Μεσαίωνα. Όμως ήδη οι σπουδαιότεροι οραματιστές του ουτοπικού κομμουνισμού εντόπισαν τη μεγάλη αμαρτία του γνωσιοκεντρικού σχολείου, την ταξικότητά του. Αντιλήφθηκαν πως η ταξική διάκριση στην κοινωνία θα ξεπεραστεί μόνο αν δοθεί στο λαό η δυνατότητα να μορφωθεί μέσα από τον ίδιο τον τρόπο διαβίωσής του, δηλαδή μέσω της χωρίς εκμετάλλευση εργασίας. Στο μεγάλο Άγγλο ουτοπιστή Ρ. Όουεν (1771 – 1858) ανήκει η ιδέα για την ολόπλευρη ανάπτυξη του ανθρώπου. Έμεινε στην ιστορία το πείραμά του να συνενώσει τη μάθηση με τη βιομηχανική εργασία. Η ανάπτυξη αυτής της ιδέας από τους Κ. Μαρξ και Φ. Ένγκελς οδήγησε στη δημιουργία της θεωρίας του «*πολυτεχνικού σχολείου*» της εργατικής τάξης (Β.Ι. Λένιν, Ν.Κ. Κρούτσκαγια). Να σημειωθεί ότι η θεωρία αυτή ξεπήδησε μέσα από την πράξη της οικοδόμησης του σοσιαλισμού στην ΕΣΣΔ και σε ολόκληρο το σοσιαλιστικό στρατόπεδο. Δεν ήταν προϊόν κάποιας μεταρρύθμισης, αλλά αποτέλεσμα ταξικών αγώνων της εργατικής τάξης.

6. Κ. Μαρξ, Φ. Ένγκελς: *Άπαντα*, τ. 2, σελ. 145 – 146, ρωσ. Έκδοση.

7. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες διανυσματικών μεγεθών: της Φυσικής και των Μαθηματικών. Η δεύτερη υποχρεούται να καλύπτει και την πρώτη. Στα Μαθηματικά, όπως και σε κάθε επιστήμη, συμβαίνει μια έννοια να επιδέχεται διάφορους ορισμούς. Σύμφωνα με τις κοινωνικοφιλοσοφικές απαιτήσεις της λαϊκής ΠΜ μπορούμε να δεχτούμε τον ορισμό του διανύσματος, που δόθηκε ειδικά για τις ανάγκες των σχολικών Μαθηματικών από τον ιστορικού κύρους σοβιετικό μαθηματικό Α.Ν. Κολμογκόροφ. Ξεκινώντας από την κεντρική ιδέα για το διάνυσμα σε μαθηματικό αντικείμενο (απεικόνιση, συνάρτηση) με την ιδιότητα να έχει κατεύθυνση και ποσοτική έκφραση (π.χ. η έννοια της ταχύτητας) όρισε ότι **διάνυσμα είναι κάθε παράλληλη μετατόπιση ενός αντικειμένου, κατά την οποία αυτό δεν αλλοιώνεται**. Από την άποψη της μαθηματικής λογικής ένας τέτοιος ορισμός δεν αντιφάσκει αλλά αντίθετα εναρμονίζεται με τη γενικότερη έννοια της απεικόνισης. Μαθηματικός σκοπός της τελευταίας είναι να ενοποιήσει όλους τους βασικούς τομείς της Γεωμετρίας, συνδέοντάς την με το σύνολο των σχολικών Μαθηματικών. Από διδακτική άποψη αυτό σημαίνει συντόμευση της ύλης χωρίς να χάνεται η γνωστική πληρότητα. Έτσι, με φιλοσοφικό υπόβαθρο την υλιστική διαλεκτική, αποκαθίσταται η ενότητα της γνώσης, που αντανάκλα την υλική ενότητα του κόσμου. Και, τέλος, από κοινωνική άποψη άρεται ο τεχνητός διαχωρισμός των Μαθηματικών από την αντικειμενική πραγματικότητα, αφού δίνεται και από αυτόν τον δρόμο έξοδος της μαθηματικής γνώσης προς τις εφαρμογές της (Μηχανική, Τέχνη). Οι παιδαγωγικές συνέπειες μιας τέτοιας αντιμετώπισης των σχολικών Μαθηματικών νομίζω πως δεν χρειάζονται σχόλια.

8. Είναι γνωστό ότι τα πάντα μεταβάλλονται συνεχώς, κάθε στιγμή. Για να εκτιμήσουμε ποσοτικά ένα φαινόμενο στη δοσμένη στιγμή, δηλαδή το μέγεθος της μεταβολής που έχει γίνει ή που μπορεί να συμβεί, ανατρέχουμε στην εμπειρική αντίληψή μας για το ρυθμό μεταβολής του. Η με σαφήνεια διατύπωση της αντίληψής μας αυτής πετυχαίνεται μέσα από την έννοια της παραγωγού, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη γλώσσα των μαθηματικών συμβόλων. Τελευταία παρατηρείται η αντικατάσταση του θεωρητικού όρου «*παραγωγός*» με τον εμπειρικό όρο «*ρυθμός*». Φαίνεται πως έτσι πετυχαίνεται μεγαλύτερη σαφήνεια για μια μαθηματική έννοια. Συγχρόνως εκδηλώνεται και μ' αυτόν τον τρόπο ο καθοριστικός ρόλος της πράξης έναντι της θεωρίας, ακόμη και όταν πρόκειται για μαθηματική θεωρία. Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της παραγωγού είναι η έννοια της ταχύτητας, γιατί μας δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της απόστασης σε κάθε χρονική στιγμή.

9. Οι διαφορικές εξισώσεις μάς δίνουν την εικόνα των ρευστών φαινομένων, σε αντίθεση με τις εξισώσεις της άλγεβρας, γνωστές ως μαθηματικοί τύποι ή ταυτότητες, που αποτυπώνουν μόνο στατικές σταθερές σχέσεις. Αυτός είναι ο λόγος που σήμερα όλες τις μαθηματικές διατυπώσεις, συμπεριλαμβανομένων και των αλγεβρικών ταυτοτήτων, τις ονομάζουμε μαθηματικά μοντέλα, ενώ τη διαδικασία της διατύπωσης την ονομάζουμε μαθηματική μοντελογράφηση. Επομένως οι διαφορικές εξισώσεις είναι ένας τρόπος μαθηματικής μοντελογράφησης των ρευστών φαινομένων.

10. Πρώτος που μελέτησε τη διαλεκτική του περάσματος από την Άλγεβρα στην Ανάλυση είναι ο Κ. Μαρξ. Βλ. π.χ. D.J. Struik, H.C. Kennedy: «*Ο Μαρξ και τα Μαθηματικά*», μεταφρ.-επιμ., Ματούλα Σερέφα, Α-Θεσσαλονίκη 1987.

11. Βλ. π.χ. Κ.Α. Ρίμπνικοφ «*Μεθοδολογία των Μαθηματικών*», μεταφρ. στα ελληνικά από τον Κ.Γ. Φιλίππιδη, Θεσσαλονίκη 1986, σσ. 18-19, 47-51 και Λ. Ιλιέφ «*Ανάπτυξη και Μαθηματικά*», μεταφρ. στα ελληνικά από τις Δ. Λουκίδου και Ο. Παυλίδου-Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 1988, σελ. 16 και 57. (Και τα δύο βιβλία διατίθενται στα βιβλιοπωλεία *Σύγχρονη Εποχή*).

12. Φ. Ένγκελς, «*Αντι-Ντίρινγκ*», εκδ. *Σύγχρονη Εποχή*, Αθήνα, 2001, σελ. 48-49. Μας βρίσκει σύμφωνους η εκτίμηση που δίνει για τα «*κλασικά Μαθηματικά*» ο σοβιετικός ακαδημαϊκός και κορυφαίος ειδικός στον τομέα της Κυβερνητικής Β.Μ. Γκλουσκόφ, καταθέτοντας την εξής άποψη: «*Τα Μαθηματικά, που σήμερα συνηθίζεται να ονομάζονται κλασικά, συμπεριλαμβάνουν στο συστατικό τους τη στοιχειώδη, την αναλυτική και τη διαφορική γεωμετρία, την άλγεβρα των πολυωνύμων με πραγματικούς και μιγαδικούς συντελεστές, την κλασική θεωρία πιθανοτήτων με τη μαθηματική στατιστική και τη μαθηματική ανάλυση. Οι κλάδοι αυτοί των Μαθηματικών γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν από τις πρακτικές ανάγκες ... Τα κλασικά Μαθηματικά αποδείχθηκαν επίσης ωφέλιμα για τη μελέτη στοιχειωδών πλευρών βιολογικών, οικονομικών ή ακόμα και κοινωνικών διαδικασιών. Εντούτοις η βαθιά μελέτη των βιολογικών και κοινωνικών φαινομένων στην ολότητά τους αποδείχθηκε πέρα των δυνατοτήτων των κλασικών Μαθηματικών. Με τους παραδοσιακά γνωστούς αλγεβρικούς τύπους, ακόμα και με τις συμπληρωματικές δυνατότητες που παρέχει η μαθηματική ανάλυση, αποδείχθηκε αδύνατο να εκφραστούν οι νόμοι της ανθρώπινης νόησης, οι κανόνες της γραμματικής με τις εξαιρέσεις τους, η ταξινόμηση των βιολογικών ειδών και πολλά άλλα.*

*Οι νέοι κλάδοι των Μαθηματικών, ικανοί να περιγράψουν φαινόμενα αυτού του είδους, άρχισαν να αναπτύσσονται ήδη από τον XIX αιώνα. Εντούτοις την πραγματική άνθηση τα νέα αυτά Μαθηματικά, που χειρίζονται όχι σχήματα και αριθμούς, αλλά οποιεσδήποτε αφηρημένες, διακριτές μεταξύ τους έννοιες, τη γνώρισαν μόλις στο καιρό μας.» (Γκλουσκόφ Β.Μ., «*ΚΥΒΕΡΝΗΤΙΚΗ. ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ*», Εκδόσεις Ακαδημίας Επιστημών της ΕΣΣΔ -Ναούκα, Μόσχα, 1986, σελ. 488. Σειρά «*Επιστήμη. Κοσμοαντίληψη. Ζωή*», σσ. 112 – 113).*

13. *ΙΣΟΜΟΡΦΙΑ*: έννοια που ορίζει με μαθηματική σαφήνεια την εμπειρική αντίληψή μας για την ιδιότητα να είναι ίδιες δύο θεωρητικές κατασκευές (λογικά, αλγεβρικά κ.α. συστήματα). Π.χ. το σύστημα διάταξης των φυσικών αριθμών και η ακολουθία των σημείων πάνω στην ευθεία από άποψη ισομορφίας είναι ίδια συστήματα. Επίσης, άλλο παράδειγμα, η διαφορική γεωμετρία είναι ισομορφή με την ευκλείδεια γεωμετρία.

14. ό.π. Κ.Α. Ρίμπνικοφ «*Μεθοδολογία των Μαθηματικών*» και Λ. Ιλιέφ «*Ανάπτυξη και Μαθηματικά*».

15. Φ. Ένγκελς, «*Αντι-Ντίρινγκ*», εκδ. *Σύγχρονη εποχή*, Αθήνα, 2001, σσ. 48 – 51.

16. *ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*, Α' και Β' τάξη Ενιαίου Λυκείου, Επιστημονική εποπτεία: Παντελίδης Γεώργιος, Στάμου Γεώργιος, εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1999.

17. Φ. Κλάιν, «*Τα στοιχειώδη Μαθηματικά από τη σκοπιά των Ανώτερων. Γεωμετρία*», Μόσχα, εκδόσεις Ναούκα, 1987, τόμος 2, σελ. 244.

18. Στο ίδιο, σσ. 286-287.

19. *FRAUDENTAL* Hans: Ολλανδός μαθηματικός, μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Ολλανδίας, βοηθός του Brower L.E.J. (1930 – 1937). Οι βασικές εργασίες του αφορούν την Άλγεβρα, την αλγεβρική τοπολογία. Μελετούσε τη θεωρία πιθανοτήτων, τις πρακτικές εφαρμογές της και την ιστορία της.

20. Β.Ι. Λένιν, *Άπαντα*, τ. 45, σελ. 29 – 30, ρωσ. εκδ.

21. Βλ. Μπ.Μ. Κεντρόφ «*Ταξινόμηση των επιστημών*», πρόγνωση του Κ. Μαρξ για την επιστήμη του μέλλοντος, Μόσχα, ΜΙΣΛ – 1985, στα ρωσ.

22. «*Το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό Υποχρεωτικό Σχολείο*», Πρόταση του Τμήματος Παιδείας της ΚΕ του ΚΚΕ, Σεπτέμβρης 1999.

23. Β.Ι. Λένιν, *Άπαντα*, τ. 47, σ. 194, ρωσ. εκδ.

24. Διαβάζουμε στο βιβλίο του σχολείου: «*Πείραμα τύχης είναι αυτό για το οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.*» Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε πείραμα αιτιοκρατικό, δηλαδή προβλέψιμο. Άρα τα φαινόμενα τα χωρίζουν σε αιτιοκρατικά και μη αιτιοκρατικά.

25. Βλ. «*Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής*», Γ' τάξη Ενιαίου Λυκείου, σ. 138, Αθήνα 2002.

26. Α.Ν. Κολμογκόροφ, «*ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ*», Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια.

27. Μπ.Β. Γκνεντένκο «*Διαμόρφωση της κοσμοαντίληψης των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών*», Μόσχα, 1982.

28. H. Poincaré, «*Calkul des probabilités*», 1896, p.1, 274.

29. Από την έννοια της πιθανότητας σαν ποσοστού άμεσα γίνεται το πέρασμα στη γεωμετρική παράσταση της πιθανότητας και απ' αυτήνστα αξιώματα της θεωρίας πιθανοτήτων, που ήδη είναι γνωστά στους μαθητές με τη μορφή της γεωμετρίας των εμβαδών.

30. Φ. Ένγκελς, «*Διαλεκτική της φύσης*», Κ. Μαρξ, Φ. Ένγκελς, *Άπαντα*, τ. 20.