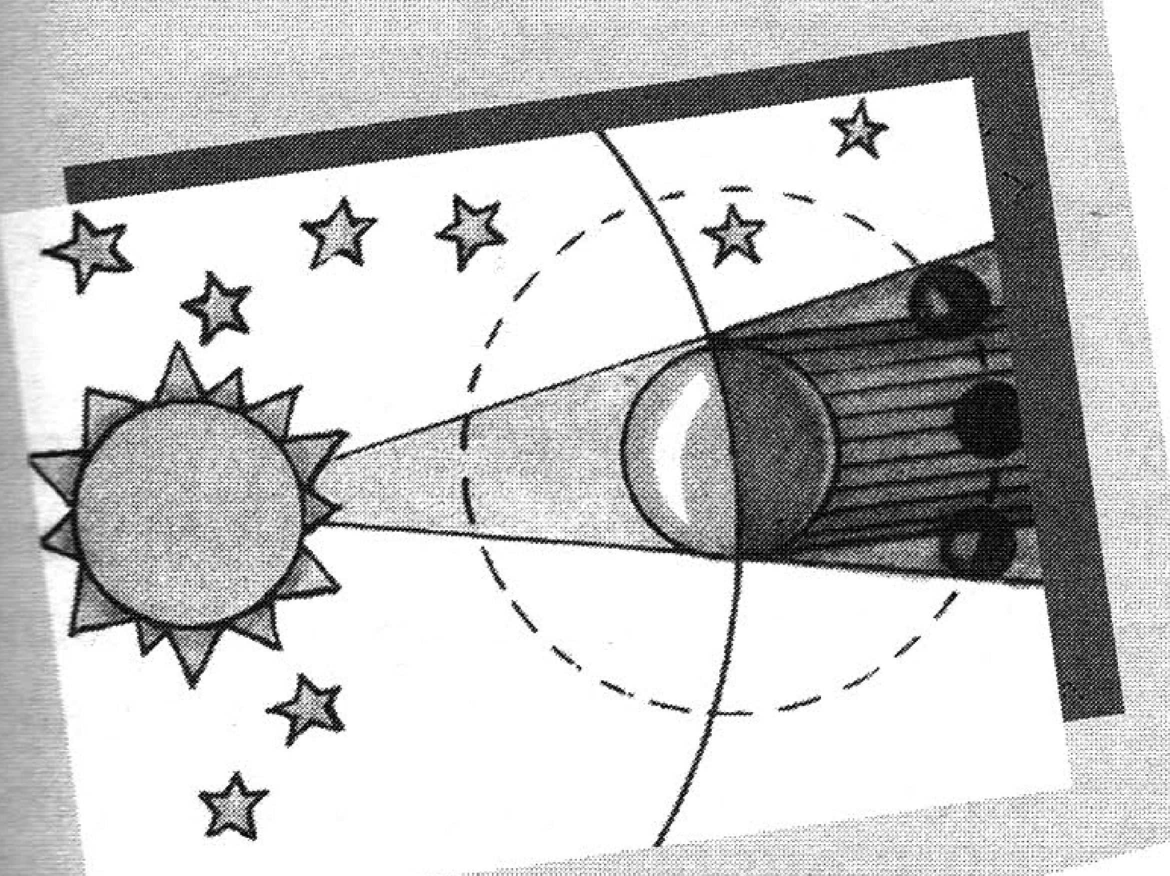
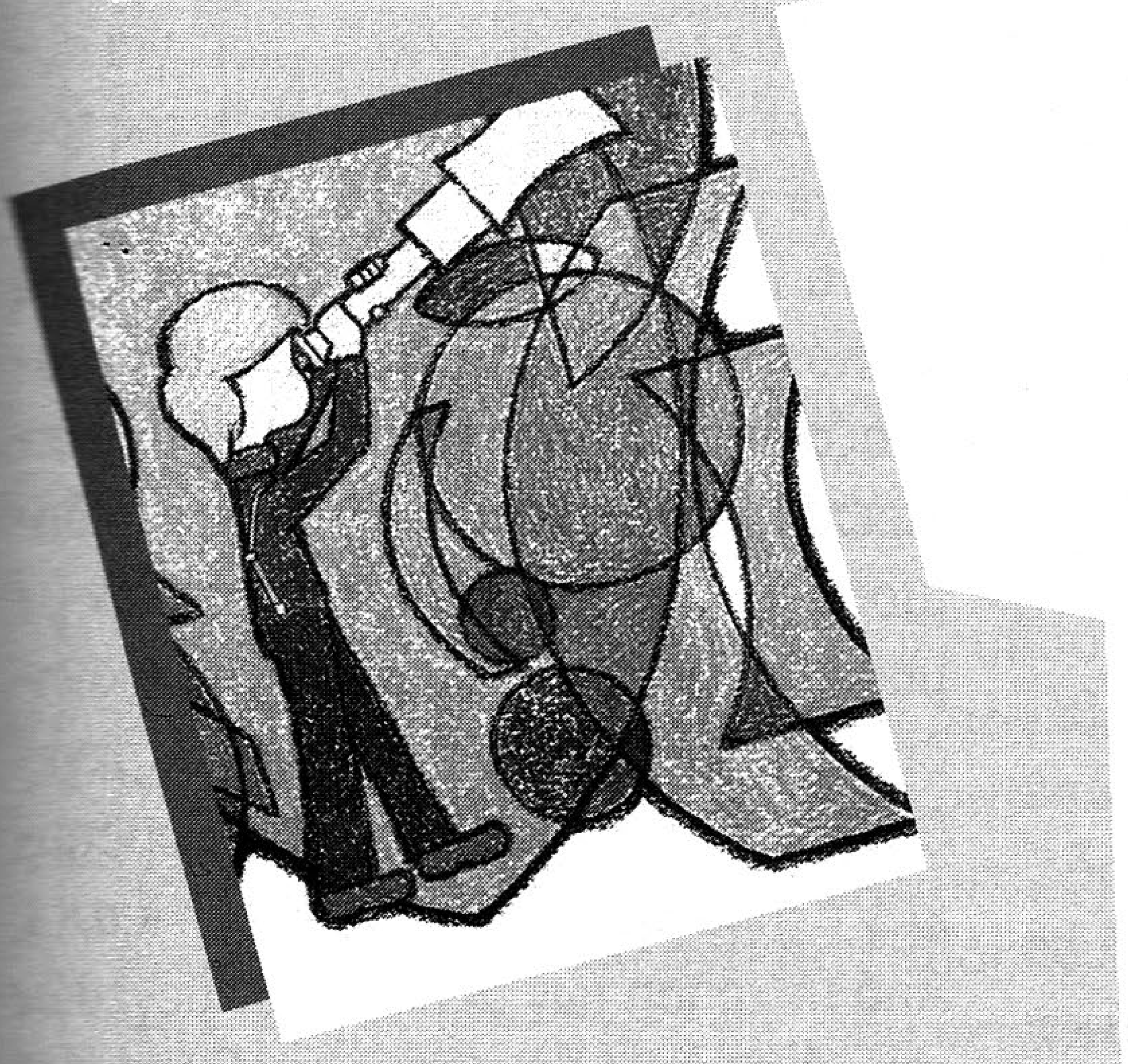
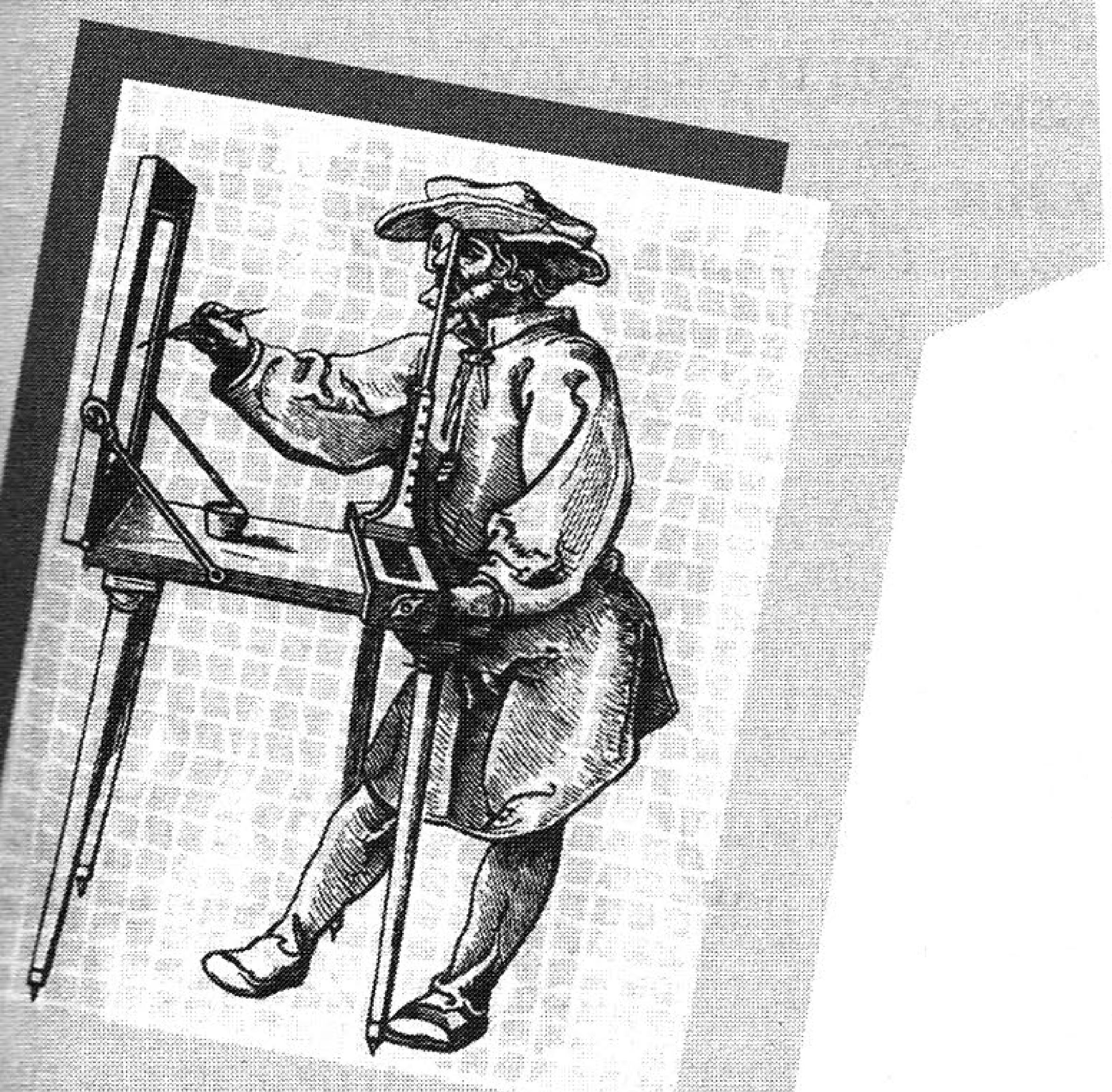






150 ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΘΑΝΑΤΟ ΤΟΥ

Νικολάι Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι

(1792 -1856)

Γιατί «*επιστήμη για όλους*;» Ας μην ξεχνάμε ότι κάθε επιστήμη έχει σε τελευταία ανάλυση τον κόσμο μας αντικείμενό της, ακόμα κι αν επεξεργάζεται το αντικείμενο αυτό δίνοντάς του εξαιρετικά αφαιρετική μορφή.

Έτσι κι η παραδοσιακά "αυστηρή" επιστήμη των Μαθηματικών, που ασχολείται με τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου. Πριν 180 χρόνια, όταν ακόμα ο Ένγκελς δεν είχε θεμελιώσει φιλοσοφικά τον παραπάνω επιστημονικό ορισμό του αντικειμένου της, κάποιος μεγάλος ρώσος μαθηματικός υπογράμμιζε προφητικά αυτήν την αλήθεια παρουσιάζοντας τα νέα στοιχεία μιας γεωμετρίας, που αμφισβητούσε την αποκλειστικότητα των αξιωμάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Ο Ι.Ν. Λομπατσέφσκι υποστήριξε ότι στη φύση δεν υπάρχουν ούτε ευθείες ούτε καμπύλες γραμμές, δεν υπάρχουν επίπεδα και καμπύλες επιφάνειες: σ' αυτήν βρίσκουμε μόνο σώματα, οπότε όλα τα υπόλοιπα, δημιουργημένα με τη φαντασία μας, υπάρχουν στη θεωρία. Ο προβληματισμός πάνω στη μαθηματική παράδοση τον οδήγησε σε κρίσιμες διαπιστώσεις για την εμφάνιση και εξέλιξη της σύγχρονης γεωμετρίας. Έναν αιώνα αργότερα ο Αϊνστάιν με τη θεωρία της σχετικότητας επιβεβαίωσε και γενίκευσε τα παραπάνω μαθηματικά συμπεράσματα συνδέοντάς τα ακόμη περισσότερο με τις φυσικές επιστήμες (κβαντική μηχανική, κοσμολογία).

Τι σημασία έχει μια τέτοια ιστορική αναφορά στη σύγχρονη μαθηματική παράδοση; Την αφορμή μας έδωσε η αγγλική έκδοση μιας *«Ανθολογίας των Μαθηματικών»**, πραγματικό αγγλοσαξονικό κατόρθωμα, αφού σ' αυτήν δε χώρεσαν ούτε ένας σοβιετικός ούτε καν ρώσος μαθηματικός! Κι αν αγνοήθηκε επιδεικτικά η σοβιετική σχολή και οι πρόδρομοί της, είναι γιατί η αστική σκέψη σήμερα θέλει να ξεκόψει, αν είναι δυνατό σε όλους τους τομείς, με κάθε επαναστατική παράδοση, ακόμα και από τις δικές της ριζοσπαστικές παραδόσεις.

Για τον ίδιο λόγο εμείς θεωρούμε χρέος τη θύμησή τους. Έτσι **αφιερώνουμε το παρακάτω δημοσίευμα στα 150 χρόνια από το θάνατο του Λομπατσέφσκι**, δημοσιεύοντας αποκλειστικά μεταφρασμένο για το περιοδικό μας – από το συνεργάτη μας Κώστα Φιλιππίδη που επιμελήθηκε συνολικά το αφιέρωμα – ένα **απόσπασμα από το μνημειώδες έργο του *«Νέα στοιχεία γεωμετρίας»***, παρά τις δυσκολίες που ένα τέτοιο εγχείρημα μπορεί να παρουσιάζει για τον απλό αναγνώστη. Αν κάποιοι βρίσκουν το κείμενο αυτό στρυφνό και δυσνόητο – χρησιμοποιεί την ειδική γλώσσα της μαθηματικής επιστήμης – ας αποχτήσουν έστω μια ιδέα διαβάζοντας το επιγραμματικό απόσπασμα από το **κλασικό έργο του Α. Ν. Κολμογκόροφ**, ενός άλλου διάσημου και σοβιετικού μαθηματικού, για την επιστήμη των Μαθηματικών, που το τοποθετούμε αντί εισαγωγής στο μικρό αυτό αφιέρωμά μας. Σημειώνουμε ότι το άρθρο αυτό (στο πρωτότυπο αποτελείται από 33 σελίδες, οπότε εδώ έχουμε αναγκαστικά μερική δημοσίευση μέσα από συντομευμένο αλλά ενιαίο κείμενο) είναι η πρώτη στα χρονικά συγγραφή της Ιστορίας των Μαθηματικών σύμφωνα με τη διαλεχτική -υλιστική μέθοδο ανάλυσης των επιστημών που εγκαινίασε ο Φρίντριχ Ένγκελς. Μέχρι τότε η ιστορία των Μαθηματικών γραφόταν στην καλύτερη περίπτωση σαν Ιστορία των ιδεών κάποιων «εγκεφάλων», κάτι που συνεχίζουν στις μέρες μας οι εκπρόσωποι του σύγχρονου σκοταδισμού. Οι δικές μας αναφορές δεν κατευθύνονται προς τα κει, κι αυτό θα φανεί ακόμη καλύτερα στα δημοσιεύματα των επόμενων τευχών.

---

* *Philosophy of Mathematics, An Anthology* edited by David Jacquette, BLACKWELL Publishers 2002 - ΩΚΕΑΝΙΔΑ

Τα μαθηματικά

Μαθηματικά: (προέλευση ελληνική: από το *«μάθημα»* = γνώση, επιστήμη). Επιστήμη των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου του πραγματικού κόσμου.

«Τα καθαρά Μαθηματικά έχουν για αντικείμενό τους τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου, κατά συνέπεια – παντελώς ρεαλιστικό υλικό. Το γεγονός ότι το υλικό αυτό αποχτά εξαιρετικά αφηρημένη μορφή, μπορεί μόνο ελαφρώς να επισκιάσει την προέλευσή του από τον πραγματικό κόσμο. Για να είμαστε όμως σε θέση να μελετήσουμε τις μορφές και τις σχέσεις αυτές σε καθαρή μορφή, είναι αναγκαίο τελείως να διαχωριστούν από το περιεχόμενό τους, να μπει στην άκρη σαν κάτι το αδιάφορο.» (Ένγκελς Φ., βλ. Κ. Μαρξ και Φ. Ένγκελς, Άπαντα, ρωσ. εκδ $2^{η}$, τ.20, σελ.37)

Η αφηρημένη εικόνα των Μ. εντούτοις δεν σημαίνει απόσπασή τους από την υλική πραγματικότητα. Σε αδιάσπαστη σύνδεση με τις αναζητήσεις της τεχνολογίας και της φυσιογνωσίας το απόθεμα των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου που μελετούν τα Μ. συνεχώς πλαταίνει, με αποτέλεσμα ο παραπάνω ορισμός των Μ. να γεμίζει με όλο και πιο πλούσιο περιεχόμενο.

Τα Μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες: Οι εφαρμογές των Μ. είναι εξαιρετικά πολύμορφες. Από την αρχή το πεδίο των μαθηματικών μεθόδων είναι απεριόριστο: όλα τα είδη της κίνησης της ύλης μπορούν να μελετηθούν με μαθηματικό τρόπο. Όμως ο ρόλος και η σημασία της μαθηματικής μεθόδου διαφέρουν κατά περίπτωση.[...]

Τυπικό παράδειγμα πλήρους κυριαρχίας της μαθηματικής μεθόδου αποτελεί η Ουράνια Μηχανική, ειδικότερα η διδασκαλία για την κίνηση των πλανητών.[...]

Ιστορία των Μαθηματικών μέχρι το 19° αιώνα: Στην προτεινόμενη στη συνέχεια περιοδοποίηση των Μ. δίνεται μόνο ο καθολικός χαραχτηρισμός τους, που αφορά τα πρώιμα στάδια στην Ευρώπη, την Ασία και τη Βόρεια Αφρική, και δεν παίρνει υπόψη ούτε τις περιφερειακές ιδιαιτερότητες, που ορισμένες φορές είναι αρκετά ουσιαστικές, ούτε τη συχνά εμφανιζόμενη έλλειψη συγχρονισμού της προόδου των μαθηματικών γνώσεων στις διάφορες περιφέρειες και χώρες.

Σαφή κατανόηση της αυτοτελούς θέσης των Μ., ως ειδικής επιστήμης που έχει δικό της αντικείμενο και μέθοδο, έγινε δυνατή μόνο μετά από συσσώρευση αρκετά μεγάλου χειροπιαστού υλικού και εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην Αρχαία Ελλάδα στον 6° και 5° πριν την χρονολογία μας αιώνα. Η ανάπτυξη των Μ. μέχρι αυτούς τους χρόνους είναι φυσικό να καταταχθεί στην <u>περίοδο της γέννησης των Μαθηματικών</u>, ενώ στον 6° και 5° π.Χ. αιώνα να συμπεριληφθεί η αρχή της <u>περιόδου των στοιχειωδών Μαθηματικών</u>, που συνεχίζονται μέχρι το 16° αιώνα. Στη διάρκεια των δύο πρώτων αυτών περιόδων οι μαθηματικές μελέτες έχουν να κάνουν κυρίως με πολύ περιορισμένο απόθεμα βασικών εννοιών, που είχαν εμφανιστεί ακόμα στα πρώιμα στάδια της ιστορικής ανάπτυξης σε σχέση με τις πιο απλές απαιτήσεις της οικονομικής ζωής.[...]Τα πρώτα προβλήματα της Μηχανικής και Φυσικής με εξαίρεση μεμονωμένων μελετών του Αρχιμήδη ($3^{ος}$ αιώνας πριν τη χρονολογία μας), που απαιτούσαν πια τις πρώτες μορφές του λογισμού των απείρως ελαχίστων, μπορούσαν ακόμη να ικανοποιούνται από το ίδιο απόθεμα των βασικών μαθηματικών εννοιών. Μοναδική επιστήμη, η οποία πολύ νωρίτερα από την πλατιά ανάπτυξη της μαθηματικής μελέτης των φαινομένων της φύσης στο 17° και 18° αιώνα πρόβαλε συστηματικά στα Μ. τις δικές της ιδιαίτερες και πολύ μεγάλες απαιτήσεις, ήταν η Αστρονομία, που εξολοκλήρου καθόρισε, για παράδειγμα, την πρώιμη ανάπτυξη της τριγωνομετρίας.

Το 17° αιώνα οι νέες απαιτήσεις της φυσιογνωσίας και της τεχνολογίας αναγκάζουν τους μαθηματικούς να συγκεντρώσουν όλη την προσοχή τους στη δημιουργία μεθόδων που επιτρέπουν με μαθηματικό τρόπο να μελετηθούν η κίνηση, οι διαδικασίες μεταβολής των μεγεθών, οι μετασχηματισμοί των γεωμετρικών σχημάτων (κατά την προβολή κ.ο.κ.). Από τη χρήση των μεταβλητών μεγεθών στην Αναλυτική Γεωμετρία του Ρ. Ντεκάρτ και τη δημιουργία του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού αρχίζει η <u>περίοδος των Μαθηματικών των μεταβλητών μεγεθών.</u>

Η παραπέρα επέκταση του κύκλου των ποσοτικών σχέσεων και μορφών του χώρου, που μελετάνε τα Μ., οδήγησε στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα στην ανάγκη να αντιμετωπίζεται συνειδητοποιημένα η διαδικασία επέκτασης του αντικειμένου των μαθηματικών ερευνών, θέτοντας μπροστά το πρόβλημα για συστηματική μελέτη από μια γενική σκοπιά των δυνατών τύπων των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου. Η δημιουργία από το Ν.Ι.Λομπατσέφσκι της *«φανταστικής γεωμετρίας»* του, που στη συνέχεια απόχτησε καθ' όλα πραγματικές εφαρμογές, ήταν το πρώτο σημαντικό βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Η ανάπτυξη αυτού του είδους των μελετών εισήγαγε στη δομή των Μ. τόσο σημαντικά χαραχτηριστικά, ώστε τα Μ. του $19^{ου}$ και $20^{ου}$ αιώνα είναι φυσικό να καταταχθούν στην

---

* Άρθρο του Κολμογκόροφ Α.Ν.στο "*Μαθηματικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό*" (επιμέλεια Γ.Β.Πρόχοροβ), Μόσχα, 1988, εκδόσεις "Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια". Μετάφραση από τα ρώσικα: Κώστας Φιλιππίδης.

Βασικότερες περίοδοι στην Ιστορία των Μαθηματικών

Στην Ιστορία των Μαθηματικών [Ι. Μ.] μπορούν να διακριθούν μεμονωμένες περίοδοι, που διαφέρουν η μια από την άλλη με μια σειρά από χαραχτηριστικές ιδιαιτερότητες. Η περιοδοποίηση είναι αναγκαία για να διευκολύνεται η διάκριση από τον πλούτο των δεδομένων της ιστορικής ανάπτυξης των Μαθηματικών. Υπάρχουν πολλές απόπειρες περιοδοποίησης της Ι. Μ.. Η περιοδοποίηση γίνεται ανάλογα με τις χώρες με βάση τους κοινωνικοοικονομικούς σχηματισμούς, τις μεγάλες ανακαλύψεις, που έχουν προσδιορίσει για ένα γνωστό διάστημα το χαραχτήρα της ανάπτυξης των Μαθηματικών κ.ο.κ.. Οι συζητήσεις για την περιοδοποίηση δεν τελειώνουν. Εν τούτοις, κατά τη γνώμη μας, ο ρόλος της περιοδοποίησης είναι καθαρά βοηθητικός και καθορίζεται από τις ανάγκες του βασικού σκοπού.

Στο παρόν βιβλίο εμείς ακολουθούμε την περιοδοποίηση που έχει οριστεί από τον Κολμογκόροφ. (Σημ. Μετ: Βλέπε *Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια*, τόμος 20, ελληνική έκδοση. Δυστυχώς μεταφραστικά προβλήματα της ελληνικής έκδοσης διαστρεβλώνουν το νόημα του πρωτότυπου κειμένου.). Η περιοδοποίηση αυτή μας φαίνεται περισσότερο ακριβής, γιατί στη βάση της τίθεται η εκτίμηση του περιεχομένου των Μαθηματικών: των σπουδαιότερων μεθόδων τους, ιδεών και αποτελεσμάτων.

α) Γένεση των Μαθηματικών: Η περίοδος αυτή εκτείνεται μέχρι τον 6° και 5° αιώνα πριν τη χρονολογία μας, δηλαδή μέχρι εκείνη τη στιγμή που τα Μαθηματικά γίνονται αυτοτελής επιστήμη, κατέχουσα δικό της αντικείμενο και μέθοδο. Η αρχή της περιόδου χάνεται στα βάθη της ιστορίας της πρωτόγονης ανθρωπότητας. Χαραχτηριστικό για την περίοδο αυτή είναι η συσσώρευση κατατεθέντος υλικού των Μαθηματικών στο πλαίσιο της κοινής μη διαμελισμένης επιστήμης.

β) Περίοδος στοιχειωδών Μαθηματικών: Απλώνεται από τον 6° – 5° αιώνα πριν τη χρονολογία μας μέχρι και το 16° αιώνα. Στην περίοδο εκείνη υπήρχαν επιτεύγματα στη μελέτη των σταθερών μεγεθών. Κάποια εικόνα γι' αυτά τα επιτεύγματα μπορούν να δώσουν τα Μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο Μέσης Εκπαίδευσης. Η περίοδος αυτή λήγει, όταν κύριο αντικείμενο στα προβλήματα των Μαθηματικών γίνονται οι διαδικασίες, οι κινήσεις, και αρχίζουν ν' αναπτύσσονται η αναλυτική γεωμετρία και η ανάλυση των απείρως ελάχιστων. Η έννοια στοιχειώδη Μαθηματικά είναι υπό συζήτηση και στις μέρες μας δεν υπάρχει κοινά αποδεχτός ορισμός τους, παρόλα αυτά η χρονική διάκριση τέτοιας περιόδου μάς φαίνεται τελείως δικαιολογημένη.

γ) Περίοδος δημιουργίας των Μαθηματικών των μεταβλητών μεθόδων. Η αρχή της περιόδου αυτής σηματοδοτείται με την εισαγωγή μεταβλητών μεγεθών στην αναλυτική γεωμετρία του Ντεκάρτ και με τη δημιουργία του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού στα έργα των Ι. Νεύτωνα και Γ. Λάιμπνιτς. Το τέλος της περιόδου βρίσκεται στα μέσα του 19ου αιώνα, όταν στα Μαθηματικά έχουν συντελεστεί εκείνες οι αλλαγές, οι οποίες τα οδήγησαν στη σύγχρονή τους κατάσταση. Στη διάρκεια αυτής της θυελλώδους και πλούσιας από γεγονότα περιόδου στοιχειοθετήθηκαν σχεδόν όλοι οι επιστημονικοί τομείς, γνωστοί σήμερα σαν κλασικές βάσεις των σύγχρονων Μαθηματικών.

δ) Περίοδος των σύγχρονων Μαθηματικών: Η έννοια του σύγχρονου προφανώς συνεχώς μετατοπίζεται. Πιθανόν ανάμεσα στην περίοδο γ' και τη σύγχρονη μπορεί να ξεχωρίσει μια νέα περίοδος (είτε περίοδοι). Στις ιστορικο-μαθηματικές εργασίες αυτό ακόμα δεν έχει γίνει, αν και η αναγκαιότητα για κάτι τέτοιο, κατά τη γνώμη μας, ήδη έγινε επιτακτική. Στο 19° και 20ό αιώνα ο όγκος των μορφών του χώρου και των ποσοτικών σχέσεων, που καλύπτονται με τις μεθόδους των Μαθηματικών, έχει εξαιρετικά διευρυνθεί. Εμφανίστηκαν πολλές νέες μαθηματικές θεωρίες, ανάλογα διευρύνθηκαν οι εφαρμογές των Μαθηματικών. Το περιεχόμενο του αντικειμένου των Μαθηματικών εμπλουτίστηκε τόσο, ώστε αυτό οδήγησε στη μετατροπή και την αντικατάσταση του συνόλου των σπουδαιότερων προβλημάτων τους.

Μαζί με τα άλλα πρώτης σημασίας προβλήματα ασυνήθιστη σημασία απόχτησε το πρόβλημα των θεμελίων των Μαθηματικών. Ως θεμέλια εννοείται το σύστημα των ιστορικών, λογικών και φιλοσοφικών προβλημάτων και θεωριών των Μαθηματικών.

Ειδικότερα ο λόγος γίνεται για την κριτική αναθεώρηση του συστήματος των αξιωμάτων των Μαθηματικών και το σύνολο των τρόπων των μαθηματικών αποδείξεων.

Η κριτική αναθεώρηση έχει σκοπό τη συγκρότηση αυστηρού συστήματος θεμελίων των Μαθηματικών, που θ' αντιστοιχεί στη συσσωρευμένη πρωτοπόρα πείρα της ανθρώπινης σκέψης. Με το τελευταίο αυτό, δηλαδή με τη συσσωρευμένη πείρα της ανθρώπινης μαθηματικής σκέψης, μας γνωρίζει η Ι. Μ..

Ρύμπνικοφ Κ. Α., ***«Ιστορία των Μαθηματικών»***,
εκδόσεις MGU,2η έκδοση, 1974. Απόσπασμα.

περίοδο των σύγχρονων Μαθηματικών.

Ο καθολικός αυτός χαραχτηρισμός των τεσσάρων βασικών περιόδων θα συμπληρωθεί στην παραπέρα έκθεση [**Σ.Σ.**: βλ. δίπλα σχετικό απόσπασμα από «*Ιστορία των Μαθηματικών*» του Ρύμπνικοφ Κ.Α., εκδόσεις MGU, 2^{η} έκδ., 1974].

Σύγχρονα Μαθηματικά: Διεύρυνση του αντικειμένου των Μαθηματικών.

Το τεράστιο, συσσωρευμένο, κατατεθειμένο υλικό οδήγησε στην αναγκαιότητα για εμβάθυνση στη λογική ανάλυση και τη συνένωσή του από νέες σκοπιές.

[...] Η σύνδεση των Μ. με τη φυσιογνωσία, εξακολουθώντας στην ουσία να είναι όχι λιγότερο στενή, αποχτά τώρα πιο πολύπλοκες μορφές. Νέες μεγάλες θεωρίες εμφανίζονται, όχι μόνο σαν αποτέλεσμα άμεσων απαιτήσεων της φυσιογνωσίας και της τεχνολογίας, αλλά επίσης από τις εσωτερικές ανάγκες των ίδιων των Μ. Τέτοια κατά βάση ήταν η ανάπτυξη της θεωρίας συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής, που κατείχε στις αρχές και τα μέσα του 19^{ου} αιώνα κεντρική θέση σε όλη τη μαθηματική ανάλυση.

[...] Ακόμα πιο αξιοσημείωτο παράδειγμα θεωρίας, που εμφανίστηκε ως αποτέλεσμα ανάπτυξης των ίδιων των Μ., αποτέλεσε η «*φαντασιώδης γεωμετρία*» του Λομπατσέφσκι. Τη δυνατότητα του νέου αυτού συστήματος γεωμετρίας είχε διανοηθεί ο Λομπατσέφσκι στη βάση της αποσαφήνισης της προέλευσης των βασικών γεωμετρικών εννοιών από την υλική πραγματικότητα και τη λογική ανάλυση της συνήθους Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο ίδιος ο Λομπατσέφσκι κατάφερε να εφαρμόσει τη γεωμετρία του μόνο για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων. Αργότερα ανακαλύφθηκαν οι σχέσεις της γεωμετρίας του με τη θεωρία των επιφανειών και με τη θεωρία ομάδων μετασχηματισμών. Η γεωμετρία αυτή βρήκε εφαρμογή στη μελέτη σπουδαίων κλάσεων αναλυτικών συναρτήσεων κτλ.

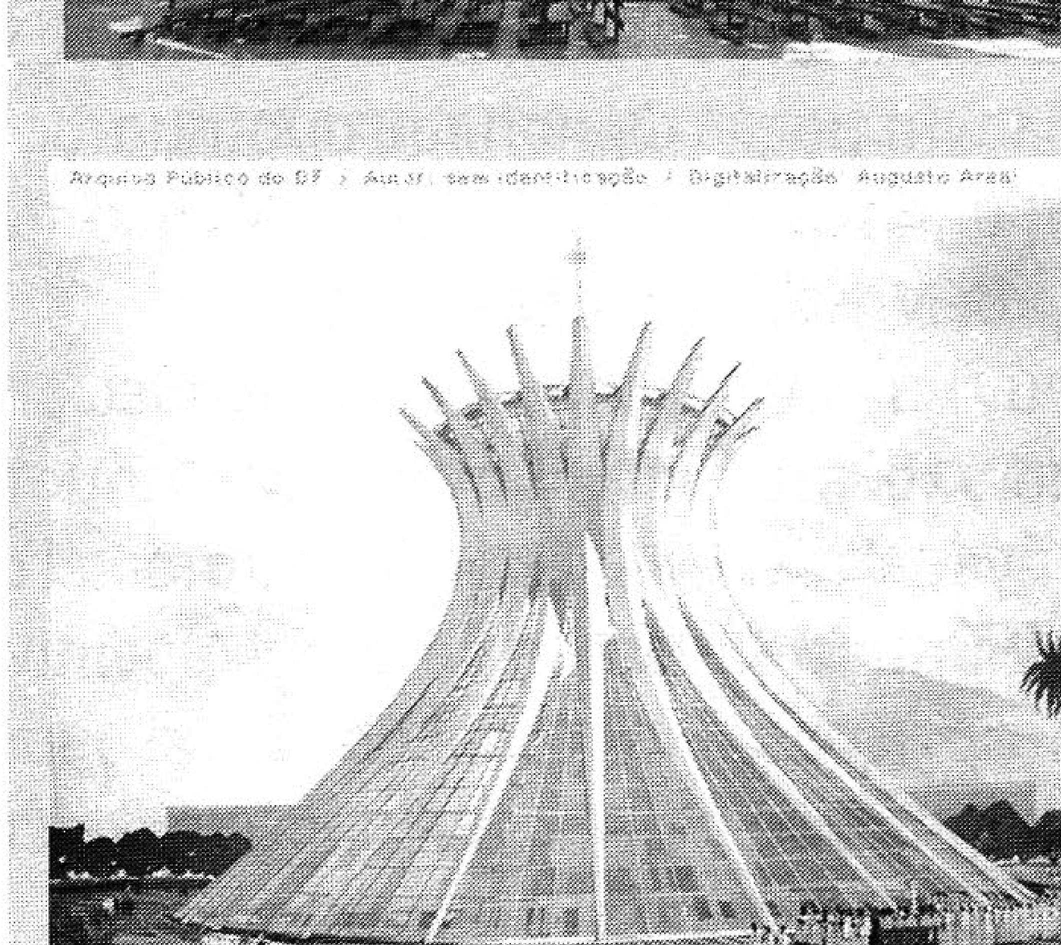
Μόνο στον 20^{ο} αιώνα, με τη δημιουργία της θεωρίας της σχετικότητας, πραγματοποιήθηκε η υπόθεση του Ν.Ι. Λομπατσέφσκι για τη δυνατότητα εφαρμογής των γεωμετρικών ιδεών του στη μελέτη του πραγματικού φυσικού χώρου.

Ο ουσιαστικός νεωτερισμός, της φάσης ανάπτυξης των Μ. που ξεκίνησε με τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, συνίσταται στο ότι τα ζητήματα αναγκαιότητας επέκτασης του κύκλου των υποκείμενων στη μελέτη ποσοτικών σχέσεων και μορφών του χώρου γίνονται αντικείμενο συνειδητού και ενεργητικού ενδιαφέροντος των Μ. Εάν προηγούμενα, για παράδειγμα, η εισαγωγή για χρήση των αρνητικών και μιγαδικών αριθμών και η ακριβής διατύπωση των κανόνων των πράξεών τους απαιτούσαν μακρόχρονη δουλειά, η ανάπτυξη των Μ. τώρα απαίτησε την επεξεργασία τεχνασμάτων συνειδητής και προσχεδιασμένης δημιουργίας νέων γεωμετρικών συστημάτων, νέων «*αλγεβρών*» με «*μη - αντιμεταθετικό*» ή ακόμη και «*μη-προσεταιριστικό*» πολλαπλασιασμό κ.τ.λ. στο βαθμό που εμφανίζεται γι' αυτό κάποια ανάγκη.

Είναι δύσκολο όμως να υπερεκτιμηθεί η σπουδαιότητα εκείνης της μετατροπής ολόκληρης της σύνθεσης της μαθηματικής σκέψης, η οποία έπρεπε για το σκοπό αυτό να διαρκέσει ολόκληρο το 19^{ο} αιώνα. Από την πλευρά αυτή των ιδεών, πιο σημαντική μεταξύ των ανακαλύψεων των αρχών του 19^{ου} αιώνα εμφανίζεται η ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι. Με το παράδειγμα ακριβώς αυτής της γεωμετρίας φαίνεται ότι είχε ξεπεραστεί η πίστη στα ευλογημένα από τη χιλιετή ανάπτυξη των Μ. αξιώματα, είχε κατανοηθεί η δυνατότητα δημιουργίας νέων στην ουσία μαθηματικών θεωριών με τον τρόπο της σωστά εφαρμοζόμενης αφαίρεσης από τους επιβαλλόμενους προηγούμενα περιορισμούς, που δεν έχουν εσωτερική λογική αναγκαιότητα, και, τέλος, είχε ανακαλυφθεί πως μια τέτοιου είδους αφηρημένη θεωρία μπορεί με το χρόνο ν' αποχτήσει όλο και πιο εκτεταμένες, καθ' όλα συγκεκριμένες εφαρμογές.

Κολμογκόροφ Α.Ν.

Όσκαρ Νιμαγέρ «*Καθεδρικός Ναός. Βραζιλία, 1958*».



Η στροφή από τον ορθολογιστικό και ατομικιστικό χαραχτήρα της αστικής αρχιτεκτονικής προς τον πρωταρχικό ρόλο του χώρου και την κοινωνική λειτουργικότητά του είναι το κύριο γνώρισμα της πρωτοπόρας αρχιτεκτονικής του 20ού αιώνα, που εκφράστηκε με πρωτοποριακά έργα, όπως αυτό του βραζιλιάνου κι αμετανόητου κομμουνιστή Oscar Niemayer Soares Fihlo (γεν. 1907, Ρίο ντε Τζανέιρο), από τους μεγαλύτερους εν ζωή αρχιτέκτονες, με 500 έργα σε όλο τον κόσμο. Ο ίδιος ο δημιουργός δηλώνει: «*Απόφυγα τις συνηθισμένες λύσεις των παλιών σκοτεινών καθεδρικών που θύμιζαν αμαρτία. Αντίθετα, έκανα την αίθουσα ολοφώτεινη, χρωματιστή, στραμμένη με τα όμορφα βιτρώ της στον απέραντο ορίζοντα. Ο καθεδρικός ναός έγινε πολύ όμορφος. Έδεσε τα γήινα επίπεδα με το απέραντο σύμπαν*».

Στον «*καθεδρικό*», όπως παρατηρούμε από την εξωτερική και εσωτερική άποψη του ναού, βάση για την αντίληψη του χώρου αποτελεί η έννοια της καμπυλότητας. Η κλειστή επιφάνεια της θετικής καμπυλότητας του συνηθισμένου ναού αντικαθίσταται από την ανοιχτή (στο άπειρο) επιφάνεια του Λομπατσέφσκι με αρνητική καμπυλότητα. Έτσι έχουμε το αρχιτεκτονικό μοντέλο της γεωμετρίας του Λομπατσέφσκι που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η πραχτική εφαρμογή της τελευταίας στο φυσικό χώρο της ευκλείδειας γεωμετρίας. Όπως συμπεραίνουμε, η «φαντασιώδης» γεωμετρία του Λομπατσέφσκι είναι και ρεαλιστική και αναγκαία.

180 ΧΡΟΝΙΑ ΤΩΝ ΜΗ - ΕΥΚΛΕΙΔΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ

*Νέα στοιχεία της Γεωμετρίας με πλήρη τη θεωρία των παραλλήλων**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ[1]

Σ' όλους είναι γνωστό ότι στη Γεωμετρία η θεωρία των παραλλήλων μέχρι σήμερα παρέμενε ατελής. Η μάταιη προσπάθεια από τον καιρό του Ευκλείδη, στη διάρκεια δύο χιλιάδων χρόνων, με ανάγκασε να υποψιάζομαι ότι στις ίδιες τις έννοιες δεν περιέχεται ακόμη εκείνη η αλήθεια, την οποία ήθελαν ν' αποδείξουν και μπορούν να επαληθεύσουν, όπως και για τους άλλους τους φυσικούς νόμους, μόνο τα πειράματα, για παράδειγμα οι Αστρονομικές παρατηρήσεις. Για την ορθότητα της εικασίας μου, όντας επιτέλους πεπεισμένος και εκτιμώντας το δύσκολο πρόβλημα ως πλήρως λυμένο, είχα γράψει ο ίδιος αυτό το συλλογισμό, το 1826[2]. Η εφαρμογή της νέας θεωρίας στην αναλυτική επίσης βρίσκεται στα άρθρα με την ονομασία ***Περί των στοιχείων της Γεωμετρίας***, καταχωρημένων στο Καζάνσκηι Βεστνήκ του 1829 και 1830. Το κύριο συμπέρασμα, στο οποίο οδηγήθηκα με την υπόθεση της εξάρτησης των γραμμών από τις γωνίες, επιτρέπει την ύπαρξη Γεωμετρίας με ευρύτερη σημασία, απ' ό,τι μας την παρουσίασε πρώτος ο Ευκλείδης. Σ' αυτή την εκτεταμένη μορφή έδωσα εγώ στην επιστήμη την ονομασία της *Φαντασιώδους Γεωμετρίας*, όπου σαν μερική περίπτωση εντάσσεται η Χρηστική Γεωμετρία μ' εκείνο τον περιορισμό στη γενική θέση, που απαιτούν οι μετρήσεις στην πραγματικότητα. Την επάρκεια των νέων στοιχείων είχα επιχειρήσει ν' αποδείξω στο έργο, που πριν λίγο είχε δημοσιευθεί στις επιστημονικές *Σημειώσεις του Πανεπιστημίου του Καζάν*[3]. Επιθυμώντας την επίτευξη αυτού του σκοπού, αν και όχι με τον ευθύ αλλά με τον πιο σύντομο δρόμο, εγώ προ-

---

* Το κείμενο αυτό, απόσπασμα από το ομώνυμο βιβλίο, δημοσιεύεται για πρώτη φορά στην ελληνική γλώσσα. Υποσημειώνονται οι παρατηρήσεις της ρώσικης σύνταξης [**Σύντ.**], καθώς και του έλληνα μεταφραστή [**Σημ.τ.Μετ.**]. Η μετάφραση απευθείας από τα ρώσικα είναι του συνεργάτη μας, ειδικού παιδαγωγού των Μαθηματικών, Κώστα Φιλιππίδη.

---

[1] Στην εισαγωγή στα *«Νέα στοιχεία της γεωμετρίας»* (1835) ο Λομπατσέφσκι, υπενθυμίζοντας με συντομία τα προηγούμενα έργα του περί της *«φαντασιώδους γεωμετρίας»*, όπως ονόμαζε το γεωμετρικό σύστημα που έχει κατασκευάσει, παρατηρεί ότι το παρόν έργο αποτελεί λεπτομερή έκθεση της νέας του γεωμετρίας. Αρχίζει με τη λεπτομερή ανάλυση των σπουδαιότερων στον καιρό του προσπαθειών απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη. Στη συνέχεια διασαφηνίζει τη σχέση της γεωμετρίας του με την ευκλείδεια γεωμετρία και εξετάζει το ζήτημα της πειραματικής επαλήθευσης της εφαρμοσιμότητας της μιας ή της άλλης γεωμετρίας στον πραγματικό χώρο. Κριτικάροντας το συνηθισμένο τρόπο έκθεσης της γεωμετρίας, που αναγόταν ακόμη στα *«Στοιχεία»* του Ευκλείδη, κατά την οποία οι έννοιες του σημείου, της γραμμής, της επιφάνειας, της διάστασης κ.ο.κ. εισαγόμενες τυπικά δεν έχουν σαφή [μαθηματικό- **Σημ.τ.Μ.**] περιεχόμενο, ο Λομπατσέφσκι θεωρεί ότι στη βάση πρέπει να τεθεί έννοια, που απεικονίζει τις πιο ουσιαστικές χωρικές ιδιότητες των υλικών αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει - η έννοια του γεωμετρικού σώματος. Εξετάζοντας στη συνέχεια το ρόλο της σύνθεσης και της ανάλυσης στη Γεωμετρία, ο Λομπατσέφσκι παρατηρεί ότι, πριν στραφούμε στις αναλυτικές μεθόδους, είναι αναγκαίο να εξακριβωθούν στη βάση της πειραματικής μελέτης και των συλλογισμών ορισμένες βασικές θέσεις, να τακτοποιηθούν σε σύστημα και να γίνουν αντικείμενο επεξεργασίας σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μπορέσουν ν' αποτελέσουν στέρεα βάση για την εισαγωγή και την εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου των συντεταγμένων. Στο κλείσιμο της εισαγωγής ο Λομπατσέφσκι εκφράζει ορισμένες θέσεις, στις οποίες στηρίζεται η θεωρία της μέτρησης των μηκών, των γωνιών, των εμβαδών και των όγκων. Λεπτομερείς σημειώσεις στην *«Εισαγωγή»*, που έχει κάνει ο Μπ. Λ. Λάπτεφ, περιλαμβάνονται στο 2ο τόμο των Απάντων του Λομπατσέφσκι, σελ. 455 – 465. [**Σύντ.**]

[2] *Exposition succincte des principes de la Geometrie, avec une demonstration rigoureuse du thoreme des paralleles.* Εισήγηση στη Συνεδρίαση του Φυσικομαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Καζάν στις 12 του Φλεβάρη του 1826, που όμως πουθενά δεν είχε δημοσιευθεί. [Ο συλλογισμός *«Exposition succincte...»* είχε διαβαστεί όχι στις 12 του Φλεβάρη του 1826, όπως υποδεικνύεται σ' αυτή τη σημείωση [των Απάντων - Σημ.τ.Μ], αλλά στις 11 του Φλεβάρη του 1826.- **Σύντ.]**

Ο Κοπέρνικος των Μαθηματικών

Στις 7 (19) Φλεβάρη του 1826 στο ασήμαντο μέχρι τότε πανεπιστήμιο του Καζάν της Ρωσίας έγινε μια ανακοίνωση, με την οποία, έπειτα από 21 περίπου αιώνες, οι μαθηματικοί βγήκαν από το ασφυχτικό πλαίσιο της γεωμετρίας του Ευκλείδη και επιδόθηκαν με πάθος στην εξερεύνηση του πραγματικού κόσμου. Την ανακοίνωση την έκανε στα γαλλικά ο Ρώσος μαθηματικός Ν. Ι. Λομπατσέφσκι, εγκαινιάζοντας την εποχή των μη-Ευκλείδιων γεωμετριών. Ήταν η εισήγηση με τίτλο *«Συμπυκνωμένη έκθεση των στοιχείων της γεωμετρίας με αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος των παραλλήλων»*. Στα φοιτητικά του χρόνια ο Ν. Ι. Λομπατσέφσκι ήταν γνωστός για τη μη υποταγή του στους αστυνομικούς κανονισμούς του πανεπιστημίου και για τον αθεϊσμό του. Παρ' όλα αυτά, το 1811, χάρη στην υποστήριξη από τον καθηγητή του Μ. Χ. Μπαρτέλς, ο Ν. Ι. Λομπατσέφσκι γίνεται καθηγητής του πανεπιστημίου του Καζάν ως το 1852. Στα 1826 -1864 διετέλεσε και πρύτανης του ίδιου πανεπιστημίου. Το έργο του Ν. Ι. Λομπατσέφσκι αντανακλούσε την εποχή του. Ως επιστήμονας είχε υλιστικές θέσεις, αναγνώριζε την αντικειμενικότητα του κόσμου και τη γνωσιμότητά του. Η επιμονή στις υλιστικές θέσεις τον οδήγησε στη διαλεχτική άρνηση της γεωμετρίας του Ευκλείδη, πράγμα που τον έκανε Κοπέρνικο των Μαθηματικών. Κριτίκαρε τον Ευκλείδη, γιατί εκείνος ξεκινούσε από τις αφηρημένες έννοιες *«σημείο»*, *«γραμμή»* και *«επιφάνεια»* και όχι από την εμπειρία. Ο ίδιος έγραφε ότι *«Ως βάση των μαθηματικών επιστημών μπορούν να γίνουν αποδεκτές όλες οι έννοιες, όποιες κι αν είναι αυτές, εφόσον τις έχουν δανειστεί από τη φύση»* και ότι *«στις ίδιες τις έννοιες δεν περιέχεται εκείνη η αλήθεια, την οποία θέλουν να αποδείξουν»*. Οι απόψεις αυτές οδήγησαν τους μαθηματικούς στην καθοριστική σήμερα ιδέα της ερμηνείας (μοντέλο). Τις ιδέες του ο Ν. Ι. Λομπατσέφσκι τις υπεράσπιζε μέχρι το τέλος της ζωής του, παρά το γεγονός ότι, όσο ζούσε, η θεωρία του είχε αναγνωριστεί μόνο από δυο μαθηματικούς: το Ρώσο Π. Ι. Κοτέλνικοφ (1842) και τον Ούγγρο Φαρκάς Μπολυάι (1851). Πολλοί μαθητές του έγιναν διάσημοι, αν και μαθηματικοί. Τα επιστημονικά ενδιαφέροντά του επεκτείνονταν και πέρα από τη Γεωμετρία, όπως στη Φυσική, στην Αστρονομία κ.ά.. Το εκπαιδευτικό του έργο παραμένει ακόμα ουσιαστικά ανεξερεύνητο. Στην εκπαίδευση ήταν φανερά ενάντια στο σχολαστικισμό και θεοκρατισμό, στις κοινωνικές διακρίσεις και την ιδιωτική εκπαίδευση (*«Για τα Μαθηματικά η εκπαίδευση απαιτείται να γίνεται από το κράτος»*). Υπερασπίζοντας τις θέσεις αυτές ο Ν. Ι. Λομπατσέφσκι, ως πρύτανης το 1828, στο λόγο του *«Περί των σπουδαιότερων καθηκόντων της αγωγής»* έλεγε: *«Εδώ διδάσκουν πράγματα που πραγματικά υπάρχουν, και όχι αυτά που απλά και μόνο εφευρέθηκαν από ένα αργόσχολο νου»*. Το έργο του συναντούσε την αντίδραση του κράτους, όπως π.χ. η προσπάθειά του να ιδρύσει *«Σύλλογο φίλων της επιστήμης»*. Τα εμπόδια αυτά τον οδήγησαν στο να υποβάλει παραίτηση από τη θέση του πρύτανη και αργότερα και από τη θέση του καθηγητή. Το κράτος αδιαφόρησε για την παραπέρα τύχη του μεγάλου επιστήμονα, που πέθανε στις 12 του Φλεβάρη του 1856 σε άθλια οικονομική κατάσταση, βαριά άρρωστος και τυφλός.

Κώστας Φιλιππίδης

Προτομή του Λομπατσέφσκι στη πόλη Καζάν

τίμησα εκείνη τη φορά από τις υποθετικές βάσεις να πάω προς τις εξισώσεις για όλες τις σχέσεις και στις εκφράσεις για οποιοδήποτε Γεωμετρικό μέγεθος. Αν η ανακάλυψή μου δεν έφερνε κανένα όφελος, εκτός από τη συμπλήρωση του ελλείμματος στην αρχική διδασκαλία, τότε τουλάχιστον η προσοχή, την οποία μονίμως άξιζε το αντικείμενο αυτό, με υποχρεώνει ήδη στη λεπτομερή έκθεση. Θα αρχίσω με την εξέταση των προηγούμενων θεωριών.

Είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι δύο ευθείες κεκλιμένες υπό την ίδια γωνία προς τρίτη ποτέ δεν θα συναντηθούν, μετατρεπόμενες, με τον τρόπο αυτό σε κάθετες προς την ίδια. Ο Ευκλείδης υπέθετε αντίθετα, ότι δύο γραμμές, κεκλιμένες διαφορετικά προς τρίτη, πρέπει πάντα να συναντιούνται. Για να βεβαιωθούν ως προς την ορθότητα της τελευταίας πρότασης, ανατρέχανε σε διάφορους τρόπους, μια προσπαθώντας εξαρχής να βρούν το άθροισμα των γωνιών στο τρίγωνο, μια συγκρίνοντας τα απείρως επεκτεινόμενα επίπεδα στο άνοιγμα των γωνιών και ανάμεσα σε καθέτους, μια επιτρέποντας την εξάρτηση των γωνιών μόνο με το περιεχόμενο των πλευρών, είτε, τέλος, αποδίδοντας νέες ιδιότητες στην ευθεία γραμμή συμπληρώνοντας τον ορισμό. Από όλες αυτές τις αποδείξεις μπορούν ορισμένες να ονομαστούν ευφυείς, όμως όλες γενικά ψευδείς, ελλιπείς στις βάσεις τους και χωρίς την πρέπουσα αυστηρότητα στο συλλογισμό· ανάμεσά τους δεν υπάρχει ακόμη και τέτοια, η οποία, συνδεόμενη με την απλή πειστικότητα, να μπορούσε να επιδοκιμαστεί από αρχάριους.

Ο Λεζάντρ το 1800 δημοσίευσε σε τρίτη έκδοση τη Γεωμετρία[4] του, όπου τοποθέτησε την πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου δεν μπορεί να είναι πλέον του π. Άμεσα αποδείκνυε και ότι ένα τέτοιο άθροισμα δεν πρέπει να είναι < του π, διέφευγε ωστόσο την προσοχή του ότι οι γραμμές μπορούν συνάμα να μη συνθέτουν πια τρίγωνο, όταν η τιμή του αθροίσματος, εξαχθείσα με άλλο τρόπο, θα παρίστανε κάποια ανακολουθία. Δεν εκτιμώ αναγκαίο να επεκταθώ εδώ σχετικά με το λάθος αυτό, το οποίο αναγνώρισε έπειτα ο ίδιος ο Λεζάντρ, λέγοντας ότι, αν και στις βάσεις τα υιοθετημένα στοιχεία δεν υπόκεινται σε αμφισβήτηση, συναντά εντούτοις δυσκολίες και δεν είναι σε θέση να τις υπερνικήσει[5]. Στις *Σημειώσεις της Γαλλικής Ακαδημίας* του 1833 συμπλήρωσε ακόμη μια πρόταση, ότι το άθροισμα των γωνιών πρέπει να είναι π σε όλα τα τρίγωνα, αν είναι τέτοιο σε ένα μόνο. Το ίδιο υποχρεούμουν ν' αποδείξω και στη δική μου θεωρία το 1826[6]. Κιόλας βρίσκω ότι ο Λεζάντρ κάμποσες φορές έπεφτε στον ίδιο δρόμο, που εγώ έχω επιλέξει τόσο επιτυχώς· όμως πιθανόν οι προκαταλήψεις υπέρ της αποδεκτής απ' όλους θέσης υποχρέωναν σε κάθε βήμα στη βιασύνη με το συμπέρασμα ή στη συμπλήρωση με κάτι, που δεν θα έπρεπε να γίνεται δεκτό στη νέα υπόθεση. Ας εξετάσουμε όλα όσα είχε δημοσιεύσει γι' αυτό το αντικείμενο στις *Σημειώσεις της Γαλλικής Ακαδημίας* του 1833.

*[**Από τη Σύνταξη:** Στη συνέχεια ο Λομπατσέφσκι παρουσιάζει τις γνωστές «αποδείξεις» του V αιτήματος του Ευκλείδη και τις ισοδύναμες με αυτό προτάσεις. Η μη ορθότητα των αποδείξεων αυτών αποκαλύπτεται από το Λομπατσέφσκι με τη βοήθεια των σχέσεων της τριγωνομετρίας στο μη-ευκλείδειο χώρο. Η στοιχειώδης έκθεση αυτών των ζητημάτων υπάρχει στην ανασκόπηση του Β.Φ. Κάγκαν «Η διδασκαλία των παράλληλων γραμμών πριν την ανακάλυψη της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας» (βλ. Β.Φ. Κάγκαν, Ο Λομπατσέφσκι και η γεωμετρία του, Μόσχα, 1955, σελ. 21-69).]*

Στη θεωρία των παραλλήλων σκέπτονταν να δεχτούν ακόμη για βάση και ότι στο τρίγωνο οι γωνίες πρέπει να εξαρτώνται από το περιεχόμενο των πλευρών.[7] Εξαρχής μια τέτοια θέση φαίνεται τόσο απλή, όσο και αναγκαία· όμως, όταν μπούμε στο νόημα των εννοιών μας, απ' όπου πηγάζει, τότε αναγκαζόμαστε να τη χαραχτηρίσουμε το ίδιο αυθαίρετη, όπως και όλες τις άλλες, στις οποίες μέχρι τώρα ανατρέχαμε. Στη φύση εμείς λαμβάνουμε γνώση καθεαυτή μόνο την κίνηση, χωρίς την οποία οι αισθησιακές εντυπώσεις είναι αδύνατες. Κι έτσι όλες οι υπόλοιπες έννοιες, για παράδειγμα οι Γεωμετρικές, έχουν παραχθεί με το νου μας τεχνητά, όντας παρμένες από τις ιδιότητες της κίνησης, και γι' αυτό ο χώρος από μόνος του, χώρια, για μας δεν υπάρχει. Έπειτα απ' αυτό στο νου μας δεν μπορεί να υπάρχει καμία αντίφαση, όταν εμείς δεχόμαστε ότι ορισμένες δυνάμεις στη φύση ακολουθούν τη μια, άλλες τη δική τους ιδιαίτερη Γεωμετρία. Για να εξηγήσουμε τη σκέψη αυτή, θέτουμε, όπως και πολλοί άλλοι είναι γι' αυτό βέβαιοι, ότι οι δυνάμεις της έλξης εξασθενούν με τη διάχυση της επίδρασης ανά τη σφαίρα. Στη χρηστική Γεωμετρία το μέγεθος της σφαίρας το δέχονται ίσο με $4\pi r^2$ για την ακτίνα r, λόγω της οποίας η δύναμη θα πρέπει να μειώνεται κατά το περιεχόμενο του τετραγώνου της απόστασης. Στη φαντασιώδη Γεωμετρία βρήκα εγώ την επιφάνεια της σφαίρας ίση με $\pi(e^r - e^{-r})^2$, και μια τέ-

[3] Στο βιβλίο Ι των Επιστημονικών Σημειώσεων του 1835 με τον τίτλο *Φαντασιώδης Γεωμετρία*.

[4] A. Legendre, *Elements de Geometrie*, 3η εκδ., Paris, 1800, σελ.472 (Βιβλίο 1, προτάσεις 19 και 20, σελ. 21-25), βλ. Β.Φ. Κάγκαν, *"Ο Λομπατσέφσκι και η γεωμετρία του"*, Μόσχα, 1955, σελ. 54 κ.ε. **[Σύντ.]**.

[5] Να τα καθεαυτά λόγια του Λεζάντρ: *«Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la demonstration füt bien connu, nous a presente des difficultes que nous n'avons pu entierement resoudre»*. (*Memoires de l' Acad. d sc. de l' Inst. De France*, Tome XII, 1833, p. 371.).

[6] Την πρόταση αυτή ο Λομπατσέφσκι την αποδείκνυε ακόμη στις διαλέξεις γεωμετρίας, που είχε παρουσιάσει το 1817 στους φοιτητές του Φυσικομαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου του Καζάν. Το σχετικό απόσπασμα από τις σημειώσεις αυτών των διαλέξεων αναφέρεται στη σελ.504 του 2ου τόμου των Απάντων των έργων του Λομπατσέφσκι [Σύντ.].

[7] Αυτού του είδους συλλογισμούς παραθέτει ο Λεζάντρ στην πρώτη έκδοση των «*Elements*» του (1794), άρθρο IV, και στο «*Reflexions...*» (1833). [Βλ. Β.Φ. Κάγκαν, *Ο Λομπατσέφσκι και η γεωμετρία του* (В.Ф.Каган, *Лобачевский и его геометрия*.[Σημ.τ.Μ.]) Μόσχα 1955, σελ.65-69. **[Σύντ.]**

τοια Γεωμετρία ίσως ακολουθούν οι μοριακές δυνάμεις, των οποίων στη συνέχεια όλη η πολυμορφία θα εξαρτάται από τον αριθμό e, πάντα αρκετά μεγάλο.[8] Εξάλλου, ας είναι αυτή καθαρή υπόθεση μόνο, για την επιβεβαίωση της οποίας πρέπει ν' αναζητηθούν άλλα πιο πειστικά επιχειρήματα· όμως σε τούτο ωστόσο **δεν επιτρέπεται ν' αμφιβάλλουμε, ότι οι δυνάμεις τα πάντα παράγουν μόνες: την κίνηση, την ταχύτητα, το χρόνο, τη μάζα, ακόμη και τις αποστάσεις και τις γωνίες.** Με τις δυνάμεις όλα βρίσκονται σε στενή σύνδεση, την οποία μη κατανοώντας στην ουσία, δεν μπορούμε να ισχυριζόμαστε ότι δήθεν στη σχέση ανόμοιων μεγεθών πρέπει να εμπεριέχονται τα περιεχόμενά τους. Επιτρέποντας την εξάρτηση από το περιεχόμενο, γιατί να μην υποθέτουμε και τις εξαρτήσεις της ευθείας; Ορισμένες περιπτώσεις μιλάνε ήδη υπέρ μιας τέτοιας άποψης: το μέγεθος της δύναμης έλξης, για παράδειγμα, εκφράζεται μέσω της μάζας, διαιρεμένης δια το τετράγωνο της απόστασης. Για την απόσταση ίση με μηδέν αυτή η έκφραση, στην ουσία, τίποτε δεν παριστάνει. Θα πρέπει ν' αρχίζουμε από κάποια, μεγάλη ή μικρή, απόσταση, αλλά πάντα πραγματική απόσταση, και τότε μόνο η δύναμη εμφανίζεται. Τώρα τίθεται το ερώτημα: μα πώς η απόσταση παράγει τη δύναμη; Πώς αυτή η σύνδεση μεταξύ τόσο ανόμοιων αντικειμένων υπάρχει στη φύση; Αυτό πιθανόν εμείς ποτέ δεν θα το κατανοήσουμε, όμως, όταν είναι ορθό ότι οι δυνάμεις εξαρτώνται από την απόσταση, τότε οι γραμμές μπορούν επίσης να είναι σε εξάρτηση από τις γωνίες. Τουλάχιστο η ανομοιομορφία είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, των οποίων η διαφορετικότητα δεν περιέχεται στην έννοια καθεαυτή, παρά μόνο στο ότι εμείς λαμβάνουμε γνώση για τη μία από τα πειράματα, ενώ για την άλλη λόγω έλλειψης παρατηρήσεων πρέπει να υποθέτουμε νοητικά, είτε πέρα από τον ορατό κόσμο είτε στο στενό κύκλο των μοριακών έλξεων.

Όπως και να είναι, η υπόθεση ότι το περιεχόμενο μόνο των αποστάσεων μπορεί να ορίζει τις γωνίες, θα είναι ειδική περίπτωση, στην οποία κάθε φορά ερχόμαστε δεχόμενοι τις γραμμές απείρως ελάχιστες. Ο τρόπος της χρηστικής Γεωμετρίας οδηγεί, συνεπώς, πάντα σε συμπεράσματα ορθά, εντούτοις όχι σε τόσο πλατιά έκταση, όσο τα δίνει το γενικό Γεωμετρικό σύστημα, το οποίο εγώ το ονόμασα *Φαντασιώδη Γεωμετρία*. Η διαφορά στις εξισώσεις της μιας με την άλλη προκύπτει από τη συμπλήρωση νέας σταθεράς, την οποία θα πρέπει πια να δώσουν οι παρατηρήσεις, την οποία όμως χωρίς αισθητή διαφορά τη βρίσκουμε από εδώ τέτοια, ώστε στους υπολογισμούς τους πραγματικούς η αποδεκτή από όλους Γεωμετρία είναι περισσότερο από επαρκής, αν και αυτή από μόνη της δεν ήταν αυστηρά ορθή. Αυτό σημαίνει ότι ένα τέτοιο σύστημα στη φύση είτε βρίσκεται τυχαία είτε όλες οι προσιτές για μας αποστάσεις σ' αυτήν είναι ακόμη απείρως ελάχιστες. Γενικά κάθε θέση, την οποία η Φανταστώδης Γεωμετρία επιτρέπει για τα στοιχεία ενός μεγέθους, όντας αποδεκτή για γραμμές μεγάλου μεγέθους, πρέπει με αναγκαιότητα να οδηγεί στους κανόνες της συνήθους Γεωμετρίας, γιατί με τέτοια υπόθεση διατηρούνται μόνο οι πρώτες δυνάμεις εκείνων των αριθμών που παριστάνουν γραμμές, και συνεπώς, παντού στις εξισώσεις θα εισαχθούν τα περιεχόμενά τους. Τέτοιες είναι οι θέσεις, για παράδειγμα, ότι οι αποστάσεις μεταξύ δύο καθέτων παντού είναι ίσες, ότι η κάθετος περιγράφει με την κορυφή της ευθεία γραμμή, ότι ο κύκλος με την αύξηση της ακτίνας μετατρέπεται σ' ευθεία γραμμή. Απ' όλες τις γνωστές παρόμοιες θέσεις να δοθεί πρέπει η προτίμηση σ' αυτή, η οποία δέχεται την εξάρτηση του περιεχομένου των γραμμών από τις γωνίες· τουλάχιστο εδώ η απλότητα της έννοιας πλησιάζει ακόμη και την πρώτη μας εμπειρία· αλλά αυτό είναι το όλο, που μπορεί να λεχθεί για υπεράσπιση: κάθε άλλος συλλογισμός θα είναι είτε ψευδής είτε αβάσιμος. Έτσι δεν θα πρέπει να φέρνει σε δύσκολη θέση το γεγονός, ότι μαζί με την άμεση εξάρτηση των γραμμών από τις γωνίες θα εισαχθεί ένα μέγεθος το ίδιο αυθαίρετο, όπως και η επιλογή της μονάδας. Ενάντια σ' αυτό μπορούμε ν' απαντάμε ότι τίποτε δεν εμποδίζει να φανταζόμαστε στις εξισώσεις το περιεχόμενο των γραμμών όχι σε μια απ' αυτές, που εδώ εξετάζονται, αλλά ως προς τέτοια, που με κάποιο τρόπο είναι ορισμένη στη φύση. Αυτό το έχω δείξει εγώ στη Φαντασιώδη Γεωμετρία, δίνοντας εξισώσεις, όπου όλες οι γραμμές εντάσσονται στο περιεχόμενο ως προς μια μόνο, την οποία θα απαιτούσαμε να βρούμε από τις παρατηρήσεις, αν αυτές θα ήταν γι' αυτό επαρκείς. Εκτιμώ μη αναγκαίο ν' αναλύσω άλλες θέσεις, υπερβολικά τεχνητές είτε αυθαίρετες. Από αυτές μία μόνο ακόμη αξίζει κάποια προσοχή: αυτή είναι η μετάβαση του κύκλου σε ευθεία γραμμή. Η ατέλεια φαίνεται εδώ, εντωμεταξύ, πρώτα-πρώτα στην παραβίαση του βαθμιαίου, όταν η καμπύλη, η οποία δεν παύει να κλείνεται, όσο μεγάλη κι αν είναι, θα πρέπει ανώμαλα να μετατραπεί σε άπειρη ευθεία, χάνοντας κατά τον τρόπο αυτό ουσιαστική ιδιότητα. Από την άποψη αυτή η Φαντασιώδης Γεωμετρία αρκετά καλύτερα συμπληρώνει το διάστημα. Σ' αυτήν, αυξάνοντας τον κύκλο του οποίου όλες οι ακτίνες συγκλίνουν σ' ένα σημείο, φτάνουμε τέλος σε τέτοια ευθεία, όπου οι κάθετες [ευθείες] συντρέχουνε στο άπειρο, αν και δεν μπορούν πια να τέμνονται. Η τέτοια ιδιότητα δεν ανήκει εντούτοις στην ευθεία, αλλά σ' εκείνη την καμπύλη, την οποία ονόμασα εγώ ως *οριακή του κύκλου* στο έργο μου *περί των στοιχείων της Γεωμετρίας*.

Τέλος, αν το ζόρικο πρόβλημα της παραλληλίας πρέπει να το λύσουμε με πείραμα, τότε το προτεινόμενο από το Λεζάντρ, με τοποθέτηση της ακτίνας έξι φορές πάνω στον κύκλο, χωρίς αμφιβολία πρέπει να εκτιμάται υπερβολικά ελλιπές. Στα δικά μου *στοιχεία της Γεωμετρίας*, χρησιμοποιώντας Αστρονομικές παρατηρήσεις, έδειξα εγώ ότι στο τρίγωνο, του οποίου τα σκέλη ισούνται σχεδόν με την απόσταση από τη γη ως τον ήλιο, το άθροισμα των γωνιών δεν μπορεί να διαφέρει από τις δύο ορθές περισσότερο των 0,000003 δευτερολέπτων της μοίρας.[9] Η διαφορά αυτή αυξάνεται σε γεωμετρικό περιεχόμενο προς τα σκέλη του τριγώνου, και συνεπώς η μέχρι τώρα χρηστική

[8] Εδώ το e συμβολίζει τον αριθμό που συνδέεται με την ακτίνα καμπυλότητας του χώρου μέσω της σχέσης . **[Σύντ.]**

Γεωμετρία, όπως εγώ παρατήρησα πιο πάνω, είναι περισσότερο από επαρκής στους πραγματικούς υπολογισμούς. Σ' αυτά τα συμπεράσματα είναι δυνατό να φτάσουμε με τη βοήθεια προτάσεων αρκετά απλών και ευπρεπών στοιχείων της επιστήμης, αν και η πλήρης θεωρία απαιτεί τελείως πια ν' αλλάξει η ταχτική στη διδασκαλία, με τη συνένωση εδώ της Τριγωνομετρίας.

Στη μη αρτιότητα της θεωρίας των παραλλήλων θα έπρεπε να συνυπολογιστεί ο ορισμός της ίδιας της παραλληλίας. Εντούτοις αυτή η ατέλεια καθόλου δεν εξαρτιόταν, όπως υποψιάζονταν ο Λεζάντρ, από την έλλειψη του ορισμού της ευθείας γραμμής ούτε ακόμη από εκείνες τις ελλείψεις, θα προσθέσω, που κρύβονταν πίσω από τις πρώτες έννοιες, και τις οποίες εγώ έχω σκοπό εδώ να υποδείξω και να επιχειρήσω, όσο μπορώ ο ίδιος, να τις διορθώσω.

Τη Γεωμετρία αρχίζουν συνήθως αποδίδοντας στα σώματα τρεις διαστάσεις, στις επιφάνειες δύο, στις γραμμές μία, μην επιτρέποντας στο σημείο καμμία. Αναφέροντας τις τρεις διαστάσεις (μήκος, πλάτος, ύψος) και εννοώντας με αυτές τις ονομασίες στην πραγματικότητα τις τρεις συντεταγμένες, βιάζονται με τον τρόπο αυτό τις πρόωρες έννοιες να τις παρουσιάσουν με λέξεις, στις οποίες η ομιλούμενη γλώσσα αποδίδει πια κάποια, αν και για ακριβή επιστήμη ακόμη αόριστη σημασία.[10] Πώς μπορεί κανείς με σαφήνεια να παριστάνει τη μέτρηση κατά μήκος, όταν δεν γνωρίζουμε ακόμη, τι είναι ευθεία γραμμή; Πώς μπορεί να γίνεται συζήτηση για πλάτος, ύψος, μη λέγοντας προηγούμενα για καθέτους, για επίπεδο, για το πώς είναι οι κάθετες σε ένα και σε διαφορετικά επίπεδα; Τέλος, αν στο σημείο δεν υπάρχει καμμία διάσταση, τότε τι μένει πια σ' αυτό, για να μπορεί να είναι αντικείμενο κρίσης; Έστω κι έτσι, ώστε την ευθεία γραμμή ο καθένας να παριστάνει σαφώς, αν και δεν μπορεί ακόμη να αποδώσει την έννοιά του· έχουμε όμως το ερώτημα, με ποιο τρόπο με τη βοήθεια της ευθείας θα πρέπει αυτός να καθορίζει τώρα μία διάσταση στην καμπύλη γραμμή, δύο στην καμπύλη επιφάνεια;

Βέβαια δεν υπάρχει αναγκαιότητα να είναι το μήκος, το πλάτος, το ύψος μεταξύ τους κάθετα: είναι αρκετό όταν γι' αυτά παίρνονται γραμμές σε διάφορες κατευθύνσεις. Αποδεχόμενοι για κανόνα να μη δανειζόμαστε πρόωρα από εκείνες τις έννοιες, τις οποίες θα πρέπει ν' αποκαλύψουμε ακολούθως, πώς, ρωτάμε, να εκφραστεί τώρα η συνθήκη, ώστε οι τρεις διαστάσεις στα σώματα ν' ανήκουν σε τρεις ευθείες διαφορετικών επιπέδων; Έπειτα η διαφορετική κατεύθυνση των δύο μερών από το σημείο τσακίσματος της γραμμής δεν πρέπει να συγχέεται με τη διπλή διάσταση του επιπέδου και, τέλος, να οριστεί πλήρως τι το ιδιαίτερο χρειάζεται να κατανοηθεί ως κατεύθυνση και ως γωνία. Κοντολογίς: ο χώρος, η διάσταση, η θέση, το σώμα, η επιφάνεια, η γραμμή, το σημείο, η κατεύθυνση, η γωνία – είναι λέξεις, με τις οποίες αρχίζουν τη Γεωμετρία, με τις οποίες όμως ποτέ δεν συνδέουν σαφείς έννοιες.

Εντωμεταξύ όλα τού είδους αυτού τα αντικείμενα μπορούν να θεωρούνται ακόμη και από άλλη σκοπιά. Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι τη σκίαση της έννοιας εδώ τη δημιουργεί η αφαίρεση, η οποία εφαρμοζόμενη στις πραγματικές μετρήσεις γίνεται περιττή και, συνεπώς, στην ίδια τη θεωρία έχει εισαχθεί ανώφελα. Οι επιφάνειες, οι γραμμές, τα σημεία, όπως τα ορίζει η Γεωμετρία, υπάρχουν μόνο στη φαντασία μας, την ίδια στιγμή που τη μέτρηση των επιφανειών και γραμμών εφαρμόζουμε χρησιμοποιώντας γι' αυτό τα σώματα. Να γιατί αξίζει μόνο να συζητάμε για επιφάνειες, γραμμές και ευθείες, όπως στην πραγματική μέτρηση θα έπρεπε να κατανοούνται, και τότε θα ακολουθούμε εκείνες ακριβώς τις έννοιες, που συνδέονται άμεσα με την παράσταση των σωμάτων στο μυαλό μας, με τις οποίες η φαντασία μας είναι εξασκημένη, τις οποίες μπορούμε να ελέγχουμε στη φύση άμεσα, χωρίς να ανατρέχουμε εκ των προτέρων σε άλλες, τεχνητές και εξωτερικές. Όμως με τις νέες αυτές έννοιες η επιστήμη παίρνει από την αρχή κιόλας άλλη κατεύθυνση, την οποία ακολουθεί, ωσότου δεν περάσει στην Αναλυτική· οπότε ο τρόπος διδασκαλίας τώρα αποχτά άλλη όψη. Θα προσπαθήσω να εξηγήσω σε τι αυτή η αλλαγή μπορεί να συνίσταται.

Στα Μαθηματικά ακολουθούν δύο τρόπους: την ανάλυση και τη σύνθεση. Το διακριτικό της κατάταξης στην ανάλυση αποτελούν οι εξισώσεις, που παίζουν το ρόλο της πρώτης βάσης για κάθε συλλογισμό και οδηγούν πια σε όλα τα συμπεράσματα. Η σύνθεση - είτε ο τρόπος των κατασκευών- απαιτεί εκείνη ακριβώς την παράσταση, η οποία άμεσα συνδέεται με τις πρώτες έννοιες στο μυαλό μας. Το κύριο κέρδος από την ανάλυση είναι εκείνο, που εδώ από τις εξισώσεις προχωράν πάντα με ευθύ δρόμο στον υποτιθέμενο σκοπό. Η σύνθεση δεν υπόκειται σε κάποιους γενικούς κανόνες, αλλά από αυτήν πρέπει να γίνεται η αρχή κατ' ανάγκη, ώστε τελικά ανακαλύπτοντας τις εξισώσεις, να φτάσουμε έτσι εκείνη τη γραμμή, πίσω από την οποία όλα περνούν πια στην επιστήμη των αριθμών. Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία αποδεικνύουν ότι δύο κάθετες δεν τέμνονται, ότι με την ισότητα ορισμένων μόνο μερών τα τρίγωνα είναι πια σε όλα ίδια. Μάταιο θα ήταν να θέλουν τις τέτοιες περιπτώσεις, όπως και ολόκληρη τη θεωρία των παραλλήλων, να τις εξετάζουν αναλυτικά. Σ' αυτό ποτέ δεν θα έχουν επιτυχίες το ίδιο, όπως δεν μπορούν να ξεφύγουν τη σύνθεση στη μέτρηση των επιπέδων, περιορισμένων από ευθείες γραμμές, στη μέτρηση των σωμάτων, των περιορισμένων από επίπεδα. Είναι αυτονόητο ότι μάλιστα πρέπει στη σύνθεση να χρησιμοποιούν τη βοήθεια της ανάλυσης, μα δεν συζητιέται ότι στα στοιχεία της Γεωμετρίας και της Μηχανικής ποτέ η ανάλυση δεν μπορεί να είναι ο μοναδικός τρόπος. Στη Γεωμετρία ως ένα βαθμό πάντα θα ανήκει το καθαυτό γεωμετρικό, που με κανένα τρόπο δεν μπορεί ν' αποσπαστεί από αυτήν. Είναι δυνατό να περιορίζεται ο κύκλος της σύνθεσης, όμως τελείως ν'

---

[9] Στο πρώτο μέρος του έργου του Λομπατσέφσκι *«Περί στοιχείων»* (1829) λαθεμένα αναφέρεται 0΄΄000372 [**Σύντ.**]

[10] Αυτού του είδους έκθεση των στοιχείων της γεωμετρίας μπορεί να βρει κανείς, για παράδειγμα, στο διαδομένο τότε εγχειρίδιο [των Μαθηματικών – **Σημ.τ.Μετ.**] *«Курс математики»* του καθηγητή του Πανεπιστημίου του Χάρκοφ Τ. Οσυπόφσκι, [Т. Осиповский -**Σημ.τ.Μετ.**] μέρος 2, έκδοση 2η, ΡΟΑ 1814, σελ. 338. – **Σύντ.**]

απαλειφθεί δεν γίνεται. Ακόμη και σ' αυτήν την προσπάθεια ν' αντικατασταθεί η σύνθεση από την ανάλυση, δεν χρειάζεται τόση βιασύνη, για να επιτρέπονται κάθε φορά συναρτήσεις, οπουδήποτε μπορεί να προβλεφθεί μόνο εξάρτηση, μη γνωρίζοντας ακόμη σε τι συνίσταται και, ακόμη χειρότερα, το πώς αυτή θα εκφράζεται. Με αυτόν τον περιορισμό στην ανάλυση καθορίζουμε τον πραγματικό σκοπό και την πρέπουσα θέση στον άλλο τρόπο[11], ο οποίος είναι ο μόνος που πρώτα αρχίζει την επιστήμη από τέτοιες έννοιες, απ' όπου ο συλλογισμός παράγει πια όλα τα υπόλοιπα εξάγοντας την ίδια στιγμή από τα πρώτα δεδομένα του νέα, έτσι έπειτα και στη συνέχεια πλαταίνοντας τα όρια των γνώσεών μας προς όλες τις κατευθύνσεις επ' άπειρον. Πρώτα δεδομένα χωρίς αμφιβολία θα είναι πάντα οι έννοιες, τις οποίες εμείς αποχτούμε μέσα από τις αισθήσεις μας. Ο νους μπορεί και πρέπει να τις αναγάγει σε ελάχιστο αριθμό, για ν' αποτελέσουν έπειτα τη στέρεα βάση της επιστήμης. Εντούτοις συνήθως τη συνθετική μέθοδο σ' αυτή τη μορφή, με τήρηση όλων των προαναφερόμενων εδώ κανόνων, κανείς δεν ακολουθεί, προτιμώντας, έστω και πρόωρα, να εισαγάγει την ανάλυση και προϋποθέτοντας την ανάπτυξη, έστω και τη μη πλήρη, εκείνων των εννοιών που αποτελούν το φυσικό νου μας και στις οποίες απομένει ν' αποδοθούν μόνο ονομασίες, μη δίνοντας ιδιαίτερη έκταση στις εξηγήσεις και μη καταβάλλοντας κόπο στην ακρίβεια των ορισμών. Αν η ευκολία και η απλότητα επιβάλλουν την επιλογή τέτοιου τρόπου διδασκαλίας, τότε από τη μεριά της αυστηρής αλήθειας θα υπάρχει πάντα το δικό της πλεονέχτημα, με το οποίο κάποτε θα πρέπει να επωφεληθούμε. Το πρώτο πείραμα μ' αυτό έχω κάνει με την Άλγεβρα[12] και τώρα καταπιάνομαι με το ίδιο στη Γεωμετρία.

Η καθαρή ανάλυση, χωρίς καμιά πια πρόσμιξη με τη σύνθεση, μπορεί στη Γεωμετρία να αρχίζει όχι νωρίτερα από τότε που κάθε εξάρτηση θα έχει παρασταθεί με εξισώσεις και για τα κάθε είδους γεωμετρικά μεγέθη θα έχουν δοθεί οι εκφράσεις τους. Το μέγεθος μπορούμε στη Γεωμετρία να το κατανοούμε μόνο με τη μέτρηση, η οποία για τις καμπύλες γραμμές και επιφάνειες καθεαυτή δεν υπάρχει. Όσο μικρά κι αν πάρουμε τα μέρη της καμπύλης, [αυτά] παραμένουν πάντα καμπύλες, συνεπώς με τη βοήθεια της ευθείας ποτέ δεν μπορούν να μετρηθούν. Το ίδιο πρέπει να ειπωθεί για την καμπύλη επιφάνεια, όπου, όσο στενά κι αν είναι τα μέρη οριοθετημένα, ποτέ δεν θα είναι επίπεδα. Από την άλλη μεριά, **στη φύση δεν υπάρχουν ούτε ευθείες ούτε καμπύλες γραμμές, δεν υπάρχουν επίπεδα και καμπύλες επιφάνειες: σ' αυτή βρίσκουμε μόνο σώματα, οπότε όλα τα υπόλοιπα, δημιουργημένα με τη φαντασία μας, υπάρχουν σε μια θεωρία.** [Υπογράμμιση του μεταφραστή.] Ο Λαγκράνζ στη βάση έθετε τη θέση του Αρχιμήδη, ότι δύο σημεία πάνω στην καμπύλη μπορούν πάντα να παρθούν τόσο κοντά, ώστε το τόξο μεταξύ τους να εκτιμάται πια μεγαλύτερο της χορδής αλλά μικρότερο των δύο εφαπτομένων του τόξου, φερόμενων από τα άκρα του ως το σημείο συνάντησής τους (*Theorie des fonctions analytiques, par Lagrange*). Μια τέτοια θέση είναι πραγματικά αναγκαία, όμως μ' αυτήν μαζί καταργείται η αρχική σκέψη: να μετρούνται οι καμπύλες γραμμές με ευθείες. Η ίδια περίπτωση είναι με τις επιφάνειες, όταν σκοπεύουν να τις μετράνε με επίπεδα. Λοιπόν ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης γραμμής, όπως και το μέγεθος της καμπύλης επιφάνειας, καθόλου δεν παριστάνει, όπως λέμε, ευθυγράμμιση της καμπυλότητας, μα κλίνει προς τελείως άλλο σκοπό: στην εξεύρεση του συνόρου, στο οποίο τόσο πιο κοντά πλησιάζει η μέτρηση στην πραγματικότητα, όσο αυτή η τελευταία γίνεται πιο ορθά. Τη μέτρηση δεν τη θεωρούν ορθότερη μ' εκείνη την αλυσίδα, της οποίας οι κρίκοι είναι οι μικρότεροι· πιο ορθή, τέλος, όταν αντί της αλυσίδας παίρνουν λεπτό νήμα, τελείως εύκαμπτο. Να γιατί στη Γεωμετρία πρέπει ν' αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των εφαπτομένων ελαττώνεται, ενώ συνάμα το άθροισμα των χορδών αυξάνεται, ωσότου τα δύο αθροίσματα θα παύσουν να διαφέρουν αντιληπτά με το όριο, στο οποίο και τα δύο πλησιάζουν και το οποίο η Γεωμετρία δέχεται πια για μήκος της καμπύλης γραμμής. Τώρα είναι φανερό ότι ο υπολογισμός με τέτοιο κανόνα είναι τόσο σύμφωνος με τη μέτρηση, όσο είναι ορθότερη αυτή η τελευταία. Εδώ φαίνεται επίσης πάνω σε τι βασίζεται η θέση του Αρχιμήδη. Κατά το παράδειγμα των καμπύλων γραμμών πρέπει να γίνεται ο συλλογισμός για το μέγεθος των επιφανειών, χωρίς καθόλου να ισχυριζόμαστε ότι δήθεν τα αρκετά μικρά μεγέθη είναι ικανά να ευθυγραμμίζονται.

Για τα επίπεδα, τα περιορισμένα από καμπύλες γραμμές, και για τα σώματα, τα περιορισμένα από καμπύλες επιφάνειες, επίσης δεν υπάρχει μέτρηση με αυστηρή έννοια, εφόσον για μέτρο θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στην πρώτη περίπτωση το τετράγωνο, στη δεύτερη ο κύβος. Εντούτοις πάντα αποσκοπώντας να βρεθεί ακριβώς το όριο, στο οποίο η πραγματική μέτρηση πλησιάζει, πρέπει να δείχνεται ότι κάθε φορά οπωσδήποτε πλησιάζουμε σε τέτοιο όριο· έπειτα να εξηγηθεί με ποιόν τρόπο τη μέτρηση πρέπει να την παριστάνουμε στον εαυτό μας και πώς μπορούμε να πετυχαίνουμε σ' αυτήν την επιθυμητή ακρίβεια. Για να ικανοποιήσουμε όλα αυτά τα αιτήματα δεν γίνεται να παραμελήσουμε τις ειδικές βοηθητικές θέσεις, τις οποίες δέχονται πια για αξιώματα: 1) τα επίπεδα είναι ίσα[13], όταν για τη σύσταση του ενός από αυτά το άλλο χωρίζεται σε μέρη, τα οποία ενώνονται σε νέα διάταξη, 2) το επίπεδο είναι μικρότερο από εκείνο, στο οποίο αυτό χωράει ολόκληρο, χωρίς ταυτόχρονα να το γεμίζει πλήρως, 3) το μέγεθος του τριγώνου εξαλείφεται μαζί με την απεριόριστη μείωση μιας πλευράς του. Η τελευταία θέση μάλιστα είναι αναγκαία στη μέτρηση των ίδιων των επιπέδων. Σε παρόμοια αξιώματα πρέπει να καταφεύγουμε και στη μέτρηση των σωμάτων.

[11] Δηλαδή τη σύνθεση **[Σύντ.]**.

[12] Н.Лобачевский, *Алгебра или вычисление конечных*. (Полн.Собр.Соч.,т.IV). [Ред.] (Ν. Λομπατσέφσκι, *Άλγεβρα είτε υπολογισμός πεπερασμένων*. Άπαντα, τ. 4ος).[**Σ.τ.Μ.]**

[13] **Σύντ.:** Ο Λομπατσέφσκι χρησιμοποιεί τον όρο *ί δ ι α,* εκεί όπου εμείς σήμερα λέμε *«congruent»*, και ί σ α, εκεί όπου εμείς μπορούμε να πούμε *«ισοσύστατα»*. (Ο όρος *«congruent»* στα ελληνικά αποδίδεται με τον όρο *«ισόσχημα»*, δηλαδή δύο σχήματα που κατά τη τοποθέτησή τους το ένα πάνω στο άλλο συμπίπτουν. Το *«ισοσύστατα»* σημαίνει ότι συναποτελούνται από τα ίδια σχήματα. – **Σημ.τ. Μ.**)