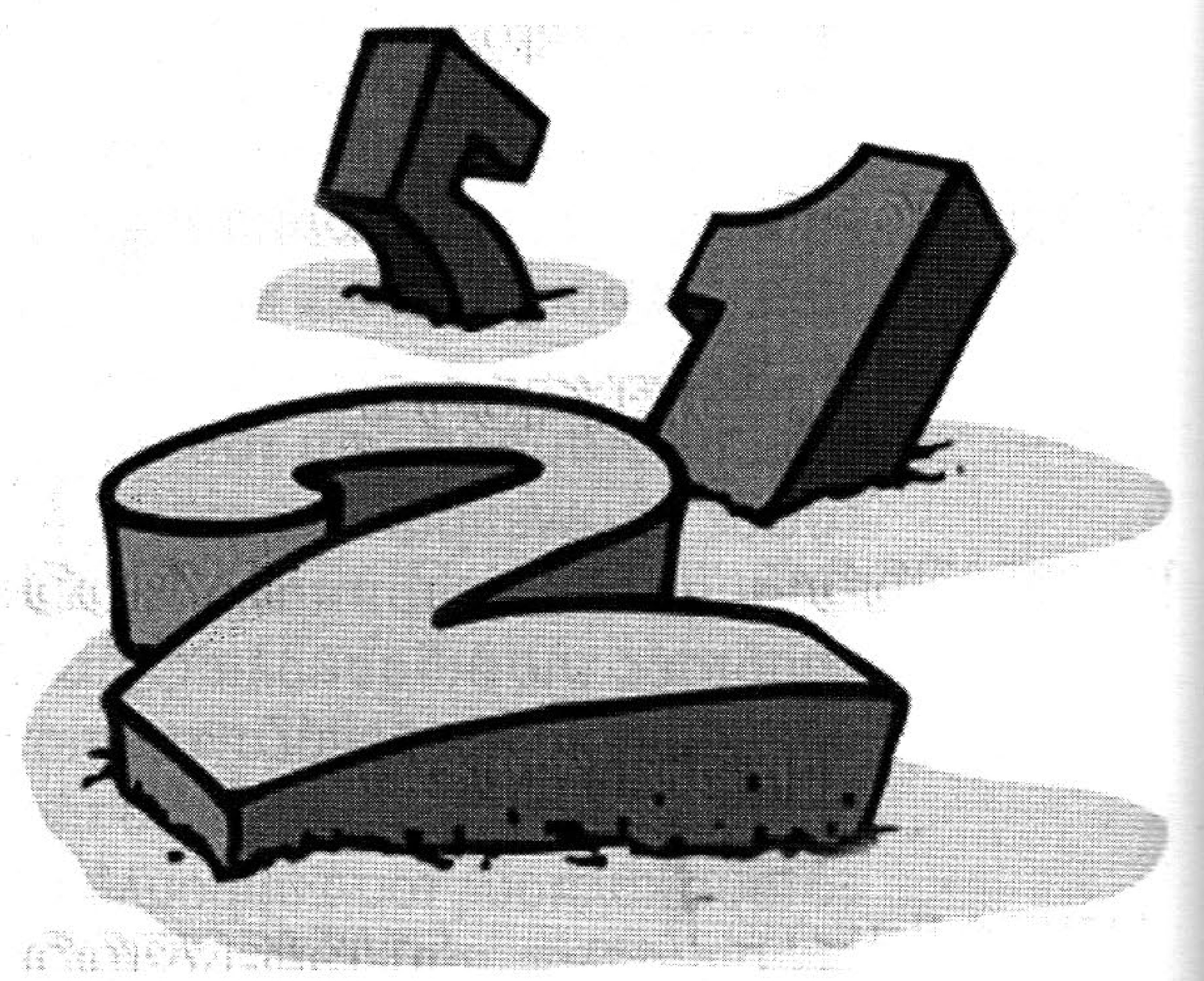
Η διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών

των Π.Γ. Γκαλπέριν και Λ.Σ. Γκεοργκίεφ*

Η κατανόηση της έννοιας της μονάδας είναι το πιο σημαντικό βήμα για τη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών στην πρώτη σχολική ηλικία (6,5-7,5 ετών). Στην ιδεαλιστική φιλοσοφία ο αριθμός έχει αυθύπαρκτη υπόσταση, ειδικά δε η μονάδα αποτελεί το θεμέλιο της ύπαρξης του κόσμου (Πυθαγόρας, Λάιμπνιτς, Χέγκελ). Η Μαρξιστική βέβαια φιλοσοφία τοποθέτησε τα Μαθηματικά σε υλιστική βάση.

«Ο αριθμός είναι ο πιο καθαρός ποσοτικός ορισμός που γνωρίζουμε. Όμως είναι γεμάτος από ποιοτικές διαφορές», γράφει ο Engels συνδέοντας διαλεχτικά το γενικό με το ατομικό. *«Τίποτα δε φαίνεται πιο απλό από την ποσοτική μονάδα και τίποτα δεν είναι πιο απλό απ' αυτήν, από τη στιγμή που τη διερευνούμε σε συνάρτηση με την αντίστοιχη πολλαπλότητα και σύμφωνα με τους διάφορους τρόπους που προκύπτει από την πολλαπλότητα»*. Οι συγγραφείς, στηριζόμενοι σ' αυτές τις θεμελιακές διαπιστώσεις, με μεθόδους Πειραματικής Ψυχολογίας συνδέουν τη διαμόρφωση της έννοιας της μονάδας με τη μέτρηση, την εφαρμογή δηλαδή μιας επιλεγμένης μονάδας μέτρησης στο υπό μέτρηση μέγεθος και, στη συνέχεια, τη χρήση των μονάδων στον προσδιορισμό μεγέθους – που είναι φαινόμενο κοινωνικό και εντελώς διαφορετικό από τις μπιχεβιοριστικού τύπου μηχανιστικές ερμηνείες, όπως αυτή των "φυσικών μαθηματικών" – επιβεβαιώνοντας ότι *«η μονάδα είναι πρώτ' απ' όλα ο βασικός αριθμός ολόκληρου του αριθμητικού συστήματος [...], όπου όλοι οι άλλοι αριθμοί προκύπτουν από τη διαδοχική πρόσθεση της μονάδας στον εαυτό της»*.[1]

Το κείμενο αποτελεί δείγμα προβληματισμού για το θεωρητικό υπόβαθρο των ερευνών στις Παιδαγωγικές Σχολές της Σοβιετικής Ένωσης, τουλάχιστον μέχρι τη δεκαετία του '60, και η ιδιαίτερη αξία του βρίσκεται στην αντιδιαστολή με τη σημερινή "παιδαγωγική" κατάρτιση στα τμήματα, που άκριτα προετοιμάζουν μηχανιστικούς διεκπεραιωτές των Αναλυτικών Προγραμμάτων.



Α΄ Ψυχολογική ανάλυση των σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών

Η έννοια της μονάδας κατέχει ειδική θέση στη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. Όλοι οι άλλοι αριθμοί χτίζονται από τη μονάδα με τον τύπο $\nu \pm 1$. Ακόμα και έννοιες όπως **πολλά-λίγα, περισσότερο-λιγότερο, τόσα-όσα**, που από πρώτη ματιά δεν έχουν αριθμητικό περιεχόμενο, γίνονται αυστηρά μαθηματικές μέσω της σύγκρισης των συνόλων με μια *«ένα προς ένα»* αντιστοίχιση.

Έτσι όλες οι στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες, ανεξάρτητα από τους περιορισμούς του περιεχομένου τους, προϋποθέτουν την έννοια της μονάδας. Επειδή αυτή η έννοια είναι πρωταρχική, δεν μπορεί να βασιστεί σε άλλες μαθηματικές έννοιες. Συνεπώς δεν μπορεί να εξηγηθεί στο παιδί με τον τρόπο που εξηγείται στη μαθηματική θεωρία, δηλαδή μέσω της σχέσης της μονάδας με τους άλλους αριθμούς. Η μονάδα είναι επίσης ένας πραγματικός αριθμός, εκφράζει μια συγκεκριμένη ποσοτική **σχέση**. Όλα αυτά δίνουν στην έννοια της μονάδας μια μοναδική θέση. Χωρίς υπερβολή μπορεί να ειπωθεί ότι πολλά στη μαθηματική εκπαίδευση εξαρτώνται από το πώς ορίζεται αυτή η έννοια από το ξεκίνημα της διδασκαλίας.

Στη μεθοδολογία και την ψυχολογία της στοιχειώδους αριθμητικής όλοι φαίνεται να συμφωνούν ότι η έννοια της μονάδας εξηγείται καλύτερα με την επίδειξη ξεχωριστών αντικειμένων, προσδιορίζοντάς τα με τη λέξη *«ένα»*: *«Εδώ υπάρχουν πολλά τούβλα* (δείχνουμε μια ομάδα απ' αυτά) *και εδώ* (ξεχωρίζουμε από την ομάδα και δείχνουμε) *είναι ένα τούβλο»* κτλ. *«Δώσε μου μια κούκλα»*, *«Φέρε μου ένα φλυτζάνι»* κτλ. Προσδιορίζοντας διαφορετικά αντικείμενα με τη λέξη *«ένα»* το παιδί διδάσκεται να ξεχωρίζει αυτή την κοινή ιδιότητα από όλες

* Η μελέτη των P. Ya. Galperin και L.S. Georgiev μεταφράστηκε από το Μ. Μιχαήλ. Οι υποσημειώσεις με αραβικούς αριθμούς και οι αγκύλες είναι του μεταφραστή, ενώ με λατινικούς αριθμούς των συγγραφέων.

1. Φ. Ένγκελς *«Διαλεκτική της φύσης»*, εκδ. Σύγχρονη Εποχή, σ.236 - 238.

τις άλλες που χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα. Έτσι, παρόλο που δε δίνεται ο ορισμός της μονάδας, όλη η διδασκαλία σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο που το περιεχόμενο αυτής της έννοιας κατανοείται σαν το ατομικό, το ξεχωριστό αντικείμενο με μοναδικό χαρακτηριστικό την ατομικότητά του. Το *«ένα»* κατανοείται σιωπηρά σαν κάτι που είναι ξεχωρισμένο, σαν το ατομικό. Αυτή η μέθοδος (που υποδείχνει ξεχωριστά αντικείμενα και απομονώνει το χαρακτηριστικό της ατομικότητας απ' όλες τις άλλες τους ιδιότητες) δικαιολογείται θεωρητικά και πρακτικά σαν η μόνη δυνατή. Πώς αλλιώς μπορεί να εξηγήσει κανείς τι είναι η μονάδα!

Όταν μελετούσαμε τη διαμόρφωση των στοιχειωδών αριθμητικών πράξεων, επίσης χρησιμοποιούσαμε αυτό το επινόημα. Ωστόσο, για να δώσουμε πλήρη αξία σ' αυτές τις νοητικές πράξεις και τις έννοιες που συνδέονται μαζί τους, αναγκαζόμαστε ν' αναρωτηθούμε: «*Τι ακριβώς κάνουμε, όταν αποκαλούμε κάποιο ξεχωριστό αντικείμενο "ένα";*». Αντικαθιστούμε κάποιο όνομα με κάποιο άλλο. Βέβαια το αντικείμενο δεν αλλάζει καθόλου, όταν κάνουμε κάτι τέτοιο. Η ατομικότητα παραμένει ατομικότητα· γιατί ξαφνικά το αποκαλούμε *«ένα»;* Οποιοδήποτε σύμπλεγμα αντικειμένων μπορεί επίσης να νοηθεί σαν μονάδα και έτσι η *«μονάδα»* δε χαρακτηρίζει το *«ένα»* αντικείμενο περισσότερο απ' όσο χαρακτηρίζει άλλα συμπλέγματα αντικειμένων με άλλους αριθμητικούς προσδιορισμούς. Προφανώς **ο χαρακτηρισμός της μονάδας σαν διακριτής οντότητας δεν είναι ικανοποιητικός**.

Από την εποχή του Γκέοργκ Κάντορ[2] η μαθηματική θεωρία διαχώρισε τις έννοιες του *«συνόλου»* και της *«ισχύος του συνόλου»*. Η **ατομικότητα** είναι μια ποιοτική περιγραφή που ταιριάζει σε κάθε **σύνολο**, αλλά ο **αριθμός** είναι η ποσοτική περιγραφή ενός συγκεκριμένου συνόλου που δείχνει την ισχύ του. *«Μονάδα»* είναι η **αριθμητική** περιγραφή ενός συγκεκριμένου συνόλου που είναι εντελώς διακριτό από άλλα σύνολα που έχουν αριθμητική περιγραφή *«δυο»*, *«τρία»* κτλ. Έτσι το να ορίζουμε το *«ένα»*, δηλαδή μια συγκεκριμένη ισχύ, μέσω του χαρακτηριστικού της ατομικότητας, ενός χαρακτηριστικού που ταιριάζει σε κάθε σύνολο, απλούστατα είναι λάθος. Είναι λάθος από μαθηματική άποψη. Έτσι δίνοντας στα παιδιά το χαρακτηριστικό της ατομικότητας σαν την πρώτη έννοια του αριθμού δεν τα προσανατολίζουμε σωστά στη μαθηματική πραγματικότητα.

Πώς εκφράζεται αυτός ο λαθεμένος προσανατολισμός και σε τι οδηγεί; Για ν' απαντήσουμε σ' αυτά τα ερωτήματα διεξάγαμε ένα πείραμα σχεδιασμένο στη βάση των διαφορών ανάμεσα στα εξής τρία σημεία: τα ξεχωριστά μέρη από τα οποία πράγματι αποτελείται ένα δοσμένο μέγεθος, τη μονάδα που υιοθετείται για τη μέτρηση αυτού του μεγέθους και τον αριθμό που προκύπτει από αυτή τη μέτρηση.

Για το πείραμα διαλέξαμε 60 παιδιά ηλικίας από 6 ετών και 6 μηνών μέχρι 7 ετών και 2 μηνών, από τρία νηπιαγωγεία[3] όπου η μελέτη των στοιχειωδών μαθηματικών γινόταν με επιτυχία.

Πρώτα επιβεβαιώσαμε τις γνώσεις των παιδιών. 30 παιδιά ξεπερνούσαν κατά πολύ το πρόγραμμα της διδακτέας ύλης: μετρούσαν πάνω από το 20 (το πρόγραμμα απαιτούσε μέχρι το 10), ενώ 17 από αυτά μετρούσαν από το 20 προς τα πίσω ξεκινώντας και από οποιοδήποτε ενδιάμεσο αριθμό. Όλα τα παιδιά μπορούσαν να δείξουν τη σύνθεση ενός αριθμού με τρεις συνδυασμούς για τον καθένα[4] (το πρόγραμμα απαιτούσε μόνο δυο) και χωρίς να έχουν μπροστά τους υλικά αντικείμενα [κύβους, ξυλάκια κτλ.]. Γνώριζαν πόσο μεγαλύτερος ή μικρότερος ήταν κάθε αριθμός από το γειτονικό του (πράγμα συνήθως δύσκολο γι' αυτό το επίπεδο). Η γνώση 21 παιδιών ήταν γενικά στο επίπεδο του προγράμματος, παρόλο που το ξεπερνούσε σε μερικά πράγματα (π.χ. μετρούσαν προς τα επάνω μέχρι το 20). Υπήρχαν και 9 παιδιά που δεν κατείχαν πλήρως την ύλη του προγράμματος: μόνο 4 από αυτά μετρούσαν από το 10 προς τα πίσω, όλα γνώριζαν ποιος αριθμός *«είναι μετά»* από ένα δοσμένο αριθμό, αλλά μόνο 3 παιδιά γνώριζαν ποιος *«είναι πριν»*. Μόνο 5 παιδιά μπορούσαν να δείξουν τη σύνθεση ενός αριθμού και μόνο αν χρησιμοποιούσαν υλικά αντικείμενα για να το κάνουν.

Δώσαμε σε όλα τα παιδιά 14 ξεχωριστές ασκήσεις που είχαν σχεδιαστεί σύμφωνα με τις διαφορές που αναφέραμε παραπάνω ανάμεσα στις φυσικές οντότητες, την έννοια της

2. Georg Cantor, Γερμανός μαθηματικός (1845-1918). Διατύπωσε τη θεωρία των συνόλων.
3. Τα παιδιά στη Σοβιετική Ένωση από παράδοση άρχιζαν το σχολείο στα 7 τους χρόνια.
4. Π.χ. 7=6+1=5+2=3+4.

μονάδας, και τη χρήση του αριθμού σε συγκεκριμένες περιστάσεις. Παρουσιάζουμε εδώ ορισμένες από αυτές τις ασκήσεις και τις απαντήσεις των παιδιών.

▶ **Πρώτη διαφορά: Η ίδια η μονάδα μπορεί ν' αποτελείται από μέρη** ***(άσκηση 3):*** [1]

Πρώτα, χύνοντας νερό από κυπελάκια σε φλυτζάνια, δείχνουμε στο παιδί ότι δυο γεμάτα κυπελάκια κάνουν ένα γεμάτο φλυτζάνι. Κατόπιν δείχνουμε 3 φλυτζάνια και 4 κυπελάκια γεμάτα νερό και ρωτάμε: *«Πόσα φλυτζάνια νερό υπάρχουν επάνω στο τραπέζι;»*.

Μόνο 11 παιδιά απάντησαν σωστά: ταίριαξαν τα κυπελάκια σε ζεύγη, τα κυκλώσανε με τα δάκτυλά τους και μέτρησαν κάθε ζεύγος σαν ένα φλυτζάνι. 49 παιδιά απάντησαν λαθεμένα: 20 από αυτά μέτρησαν διαδοχικά όλα τα δοχεία ονομάζοντας τα κυπελάκια φλυτζάνια, 17 παιδιά επίσης μέτρησαν διαδοχικά αλλά ονόμασαν τα δοχεία κανονικά, 12 μέτρησαν τα φλυτζάνια και σταμάτησαν λέγοντας ότι δεν υπήρχαν άλλα φλυτζάνια. Γι' αυτά τα τελευταία παιδιά τα κυπελάκια με νερό και τα φλυτζάνια με νερό ήταν ασυμβίβαστες οντότητες. Για τα υπόλοιπα 37 παιδιά [από αυτά που δεν απάντησαν σωστά] η οντότητα ήταν μια μονάδα.

▶ **Δεύτερη διαφορά: Το μέγεθος δεν μπορεί να παρουσιάζεται σαν μια οντότητα, και οι μονάδες με τις οποίες μετριέται δεν μπορούν να προσδιορίζονται άμεσα σαν οντότητες** *(άσκηση 7):*

Δίνουμε στο παιδί ένα μακρύ κορδόνι και του ζητάμε να μετρήσει πάνω σ' αυτό τμήματα ίσα με τέσσερα *«σαν αυτό εδώ»* (του δίνουμε σαν μοντέλο ένα κομμάτι κορδόνι μήκους 10 εκατοστών).[5]

40 παιδιά δεν έλυσαν το πρόβλημα: από αυτά 11 έκοψαν 4 χωριστά τμήματα των 10 εκατοστών, 10 μέτρησαν το τμήμα που τους ζητήθηκε τελείως αυθαίρετα, 10 μέτρησαν 4 τμήματα αλλά δε χρησιμοποίησαν το μοντέλο σωστά, 9 δε γνώριζαν γενικά τι να κάνουν. Προφανώς γι' αυτά τα τελευταία 9 παιδιά το να έχει ένα απροσδιόριστο μέγεθος 4 ξεχωριστά τμήματα είναι κάτι γενικά ακατανόητο. Τα υπόλοιπα 31 παιδιά έβλεπαν το πρόβλημα μόνο με όρους διακριτότητας του όλου ή των μερών του και αγνόησαν τις διαστάσεις και των δυο.

Ο προσανατολισμός στη βάση της ατομικότητας οδηγεί και σε πολλά άλλα λάθη. Η ατομικότητα είναι μια γενική ιδιότητα. Αν την παρουσιάσουμε ως χαρακτηριστικό της μονάδας, το παιδί αναπτύσσει μια φυσική και δικαιολογημένη αδιαφορία για το μέγεθος της μονάδας μέτρησης και για την πληρότητά της.

▶ **Παράδειγμα αδιαφορίας για το μέγεθος της μονάδας μέτρησης** *(άσκηση 10):*

Ο πειραματιστής βάζει στο τραπέζι δυο ίδια φλυτζάνια γεμάτα με ρύζι. Ρωτάει το παιδί ποιο φλυτζάνι περιέχει περισσότερο ρύζι. Αν το παιδί πει ότι υπάρχει κάποια *«διαφορά»*, ο πειραματιστής την εξαλείφει βάζοντας λίγο ρύζι ακόμα εκεί που το παιδί θεωρεί ότι είναι *«λιγότερο»*, μέχρι να πει το παιδί ότι η ποσότητα και στα δυο φλυτζάνια είναι ίδια. Κατόπιν ζητάει από το παιδί να μετρήσει πόσες **κουταλιές** ρυζιού είναι στο ένα φλυτζάνι και πόσες στο άλλο. Το παιδί με διαδοχικές κουταλιές αδειάζει το ρύζι επάνω στο τραπέζι σχηματίζοντας μικρούς σωρούς (ένα σωρό με κάθε κουταλιά), τον ένα δίπλα στον άλλο. Δημιουργούνται έτσι δυο ομάδες σωρών, μια για κάθε φλυτζάνι. Ο πειραματιστής διαχωρίζει τις δυο ομάδες τοποθετώντας ένα χάρακα ανάμεσά τους και ρωτάει το παιδί ποια ομάδα έχει πιο πολύ ρύζι.

Από τα 60 παιδιά τα 50 απάντησαν ότι υπήρχε περισσότερο ρύζι εκεί όπου υπήρχαν περισσότεροι σωροί.[6] Το μέγεθος των σωρών αγνοήθηκε πλήρως και επικράτησε η αντίληψη του αριθμού των σωρών.

▶ **Παράδειγμα αδιαφορίας για την πληρότητα της μονάδας μέτρησης** *(άσκηση 1):*

Ο πειραματιστής ζητάει από το παιδί να βάλει 5 κουταλιές ρύζι σε ένα σωρό και κατόπιν ν' αφαιρέσει 4 κουταλιές από το σωρό. Ρωτάει: *«Πόσες κουταλιές ρύζι έμειναν;»*.

Τα παιδιά γνώριζαν να κάνουν αφαίρεση, αλλά δυσκολεύτηκαν γιατί δεν έλεγξαν την πληρότητα των κουταλιών και βρέθηκαν με πολύ μεγάλο υπόλοιπο. 18 παιδιά κοιτώντας το υπόλοιπο και *«κρίνοντας με το μάτι»* απάντησαν ότι υπήρχαν 3 (μερικά δήλωσαν 4) κουταλιές υπόλοιπο. 10 παιδιά, χωρίς να κοιτάξουν το υπόλοιπο, απάντησαν μετά από λίγα δευτερόλεπτα ότι *«έμεινε μια κουταλιά»*. Ο πειραματιστής ρώτησε: *«Είναι πράγματι μια κουταλιά;»*. Τότε 6 παιδιά [από αυτά τα 10] συμφώνησαν ότι

I. Οι αριθμοί των ασκήσεων στο κείμενο αναφέρονται στις πειραματικές σειρές από 14 ασκήσεις.

5. Το παιδί έπρεπε να μετρήσει με το μοντέλο 4 συνεχόμενα μήκη επάνω στο μακρύ κορδόνι και να κόψει το απαιτούμενο μήκος.

6. Επειδή οι κουταλιές δεν ήταν όλες ίδιες, είχε προκύψει διαφορετικό πλήθος κουταλιών από κάθε φλυτζάνι.

είχε μείνει περισσότερο ρύζι και σήκωσαν τους ώμους με απορία. Όμως 4 από αυτά τα παιδιά επέμειναν: *«Βγάλε 4 από 5 και θα βρεις 1. Αυτό σημαίνει ότι έμεινε μια κουταλιά»*. Μόνο αφού μέτρησαν το υπόλοιπο με το κουτάλι, συμφώνησαν ότι είχε μείνει περισσότερο, και απόρησαν. Τελικά μόνο 4 απ' όλα τα παιδιά μετά την ερώτηση για το υπόλοιπο θυμήθηκαν ξαφνικά και είπαν: *«Ω! Δε γέμισα τελείως το κουτάλι αφαιρώντας ρύζι! Γι' αυτό περίσσεψε πιο πολύ!»*.

▸ **Όταν η προτεινόμενη μονάδα μέτρησης οριστεί μέσω των ιδιοτήτων της ατομικότητας ή του ξεχωριστού, συχνά δε θεωρείται σαν εργαλείο για το διαχωρισμό μονάδων [του μεγέθους] προκειμένου ν' αριθμηθούν [οι μονάδες] στη συνέχεια, αλλά σαν συγκεκριμένη ποσότητα που αντιμετωπίζεται όπως και η ποσότητα που πρέπει να μετρηθεί** *(άσκηση 4):*

Ο πειραματιστής βάζει ένα σωρό ρύζι στο τραπέζι και δίπλα δυο κουτάλια, ένα της σούπας και ένα του τσαγιού. Ρωτάει: *«Υπάρχουν 10 κουταλιές ρύζι σ' αυτό το σωρό. Ποιο από τα δυο κουτάλια χρησιμοποίησα για να μετρήσω το ρύζι;»* (είχε μετρήσει με το κουτάλι του τσαγιού).

22 παιδιά χωρίς δισταγμό διάλεξαν το κουτάλι της σούπας, ενώ 5 παιδιά ταλαντεύτηκαν και ζήτησαν κάποια ένδειξη από τον πειραματιστή. Δηλαδή σχεδόν τα μισά παιδιά (27/60) συσχέτισαν άμεσα το *«μεγάλο αριθμό»* με το *«μεγάλο κουτάλι»*. **Αυτά τα παιδιά δεν έπιασαν την ιδέα ότι ο αριθμός των μονάδων είναι αντιστρόφως ανάλογος με το μέγεθος της μονάδας μέτρησης που χρησιμοποιείται κατά τη μέτρηση ενός συγκεκριμένου μεγέθους.**

Ακόμα σ' αυτό το παράδειγμα ο αριθμός που χαρακτηρίζει ορισμένο μέγεθος δεν εμφανίζεται στα παιδιά σαν σχέση, αλλά σαν μια άμεσα δοσμένη ποσότητα.

▸ Στην επόμενη άσκηση η τοποθέτηση πλάι-πλάι του αριθμού και του συγκεκριμένου μεγέθους φαίνεται πιο καθαρά *(άσκηση 11):*

Το παιδί φτιάχνει δυο σωρούς ρύζι χρησιμοποιώντας για τον πρώτο 5 κουταλιές του τσαγιού και για το δεύτερο 4 κουταλιές της σούπας. Ο πειραματιστής ρωτάει ποιός σωρός περιέχει περισσότερες κουταλιές ρύζι (τονίζει τη λέξη *«κουταλιές»* και επαναλαμβάνει την ερώτηση αρκετές φορές).

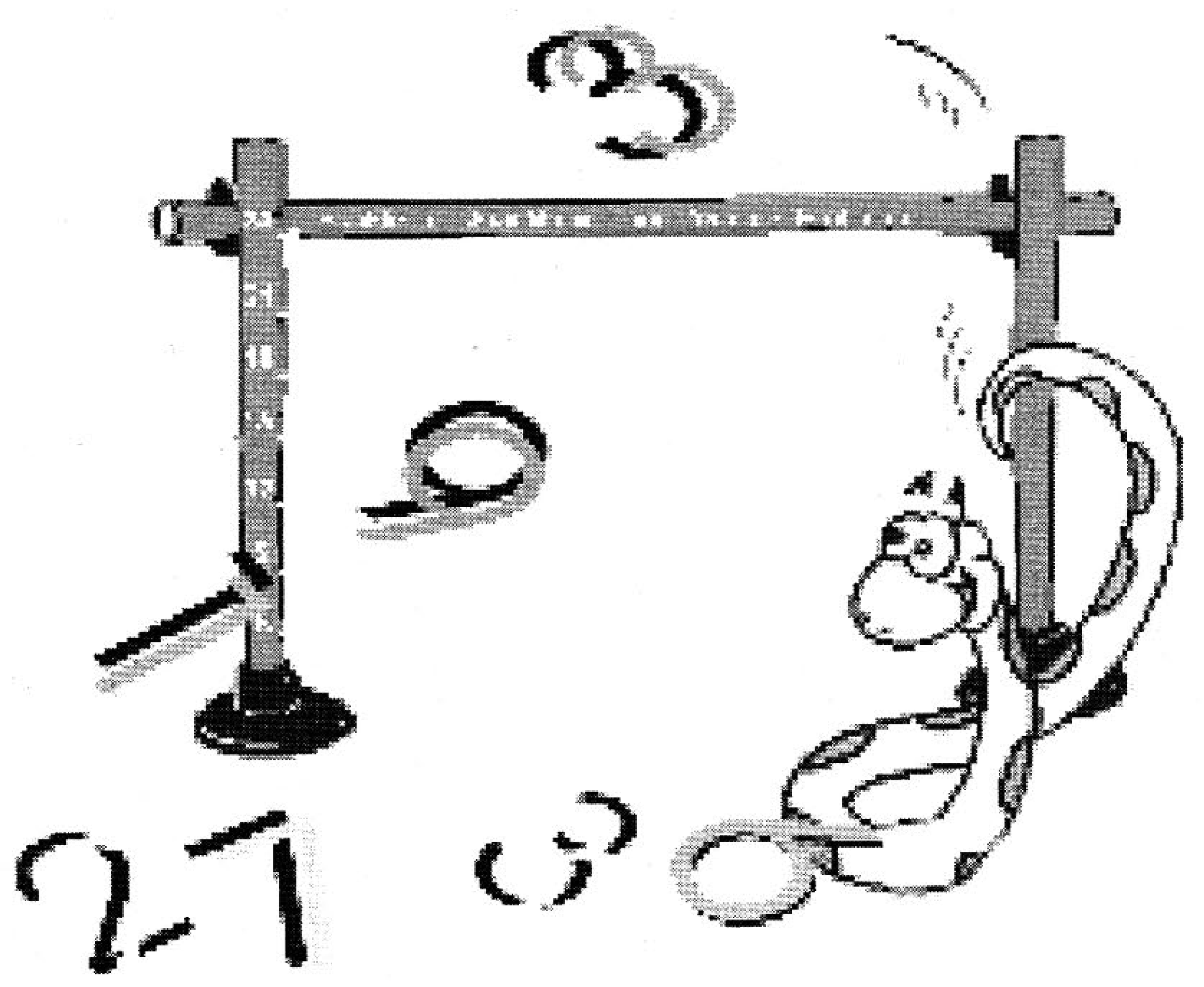
35 παιδιά υποστήριξαν με επιμονή ότι υπήρχαν περισσότερες κουταλιές στο μεγαλύτερο σωρό, ενώ δεν είχαν ξεχάσει τον αριθμό των κουταλιών που είχαν αριθμήσει. Όταν ρωτήθηκαν *«Πόσες κουταλιές ρύζι έβαλες εκεί; Και εδώ;»* έδωσαν τους σωστούς αριθμούς, αλλά προσανατολίζονταν στη βάση της οπτικής σύγκρισης των συνολικών μεγεθών.

▸ **Πρέπει να τονίσουμε ότι ο προσανατολισμός στη βάση της ατομικότητας σημαίνει μάλλον άμεση οπτική συσχέτιση των μεγεθών παρά των αποτελεσμάτων μέτρησης των μεγεθών με δοσμένη μονάδα μέτρησης.** Συνεπώς είναι φυσικό η σκέψη του παιδιού να προσδιορίζεται από τις χωρικές διαστάσεις των μεγεθών, που οπτικά υπερισχύουν της μονάδας μέτρησης *(άσκηση 12):*

Χρησιμοποιώντας ένα κουτάλι το παιδί φτιάχνει τρεις σωρούς ρύζι στη σειρά: ο I περιέχει 4 κουταλιές, ο II και ο III από 2 κουταλιές ο καθένας. Ο πειραματιστής ρωτά: *«Πόσες κουταλιές έβαλες σε κάθε σωρό;»*. Όλα τα υποκείμενα απαντούν σωστά. *«Τώρα δες»* λέει ο πειραματιστής, καθώς απλώνει λίγο το ρύζι του μεσαίου (II) σωρού, ενώ το παιδί παρατηρεί, *«και πες μου πού έχει πιο πολύ ρύζι, εδώ ή εκεί* (I ή II), *εδώ ή εκεί* (II ή III)*;»*.

28 παιδιά αποφασιστικά διάλεξαν το μεσαίο σωρό σαν το μεγαλύτερο. **Το χαρακτηριστικό της επιφάνειας που καταλαμβάνεται επικράτησε πάνω στα άλλα χαρακτηριστικά και προσδιόρισε το συλλογισμό αυτών των παιδιών πλήρως.** 17 παιδιά έδειξαν σωστά τη σχέση των σωρών I και II, αλλά ταλαντεύτηκαν πολύ στην εκτίμησή τους για το συσχετισμό των II και III. Αυτό φυσικά είναι κατανοητό: Στο σωρό I (4 κουταλιές) το ύψος και ο όγκος υπερτερούσαν καθαρά σε σχέση με το ύψος και τον όγκο του σωρού II, που ήταν μεγαλύτερος μόνο κατά την επιφάνεια. Εκεί οφείλεται ο μικρότερος αριθμός των λαθεμένων απαντήσεων κατά την εκτίμηση αυτών των δυο σωρών. Αλλά στο σωρό III το ύψος ήταν μόνο λίγο μεγαλύτερο απ' ό,τι του σωρού II, ενώ η επιφάνειά του ήταν πολύ μικρότερη. Συνεπώς η εκτίμησή τους έγινε πολύ πιο δύσκολη. Συνολικά 45 παιδιά προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα στη βάση της άμεσης σύγκρισης των ορατών διαστάσεων.

Στις διάφορες ασκήσεις ο αριθμός των σωστών και των λαθεμένων απαντήσεων άλλαζε και η αιτία ήταν φανερή: όσο περισσότερο κυριαρχούσαν οι οπτικές συσχετίσεις, τόσο περισσότερες ήταν οι λαθεμένες απαντήσεις. Όσο περισσότερο η άσκηση ή το υλικό της



υποδήλωνε μέτρηση και αρίθμηση, όπως γίνεται πρακτικά στην καθημερινή ζωή, τόσο περισσότερες ήταν οι σωστές απαντήσεις. Αυτό σημαίνει ότι ορισμένα παιδιά μερικές φορές προσανατολίζονταν από οπτικές συσχετίσεις και μερικές φορές από μέτρηση και αρίθμηση.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της έρευνας μπορούμε να πούμε ότι ο ορισμός της μονάδας σαν οντότητας έχει δυο θεμελιώδη ελαττώματα.

Πρώτον, δεν έχει σχέση με τη μονάδα μέτρησης και δεν αναπτύσσει μια κατανόηση του γεγονότος ότι ο αριθμός είναι μια σχέση του μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης. **Δεύτερον**, ένας τέτοιος ορισμός επιτρέπει θεώρηση της ποσοτικής φύσης των πραγμάτων μόνο, όταν συγκρίνονται άμεσα. Αυτό εξηγεί την εκτίμηση των παιδιών για τα μεγέθη με άμεση παράθεση πλάι-πλάι (και όχι με μέτρησή τους με μια κοινή μονάδα μέτρησης) και την έλλειψη κατανόησης της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στο μέγεθος της μονάδας μέτρησης και του αριθμού (και [εξηγεί] την υποκατάστασή τους με άμεσες σχέσεις). Εδώ ο αριθμός λαμβάνεται σαν ένα μέγεθος στο ίδιο επίπεδο με τα άλλα μεγέθη, και τα παιδιά λειτουργούν με τα χαρακτηριστικά που κυριαρχούν στην άμεση αντίληψή τους.

Όλα αυτά μπορούν να εκφραστούν με την εξής δήλωση: **Η διαμόρφωση της έννοιας της μονάδας σαν μιας οντότητας καταλήγει σε προσανατολισμό που δεν επιτρέπει την εφαρμογή της μονάδας σαν ένα μέσο για μέτρηση και αρίθμηση. Ο προσανατολισμός αυτός οδηγεί σε ποσοτικές διακρίσεις με άμεση οπτική σύγκριση.**

Τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν επίσης καθαρά ότι στην πρακτική εφαρμογή των αριθμών αυτά τα ελαττώματα εξαλείφονται βαθμιαία. Δεν υπήρξαν ασκήσεις όπου αποτύχανε όλα τα παιδιά. Πάντοτε ορισμένα παιδιά τις έλυναν σωστά, και το πλήθος τους κάθε φορά ήταν τόσο μεγαλύτερο, όσο πιο πολύ η μέτρηση και η αρίθμηση ήταν συνηθισμένη για τη δοσμένη άσκηση, όσο λιγότερο διέφεραν οι μονάδες από οντότητες και όσο πιο καθαρά παρουσιάζονταν οι ίδιες οι μονάδες. Ωστόσο η εξάλειψη του λαθεμένου προσανατολισμού με αυτό τον τρόπο έχει ουσιαστικά μειονεκτήματα:

Πρώτον, προχωρεί αυθόρμητα, έξω από την κανονικά σχεδιασμένη διδασκαλία. Είναι ενδεικτικό το ότι το επίπεδο επιδόσεων των παιδιών (στη βάση του προγράμματος) λίγο συσχετιζόταν με την επιτυχία τους στις ασκήσεις του δικού μας πειράματος. Υπήρχαν σχεδόν πάντοτε εξαιρετικοί μαθητές ανάμεσα σ' αυτούς που λειτουργούσαν στη βάση του λαθεμένου προσανατολισμού και οι διαφορές [ως προς αυτό] ανάμεσα στους καλούς και τους μέτριους μαθητές ήταν ασήμαντες.

Δεύτερον, η διόρθωση του λαθεμένου προσανατολισμού προχωρεί ενάντια στην προηγούμενη διδασκαλία που βασίστηκε στην προφανή και αυθόρμητη έννοια της μονάδας. Ενδεικτικές ήταν οι δυσκολίες των μαθητών να λύσουν συγκεκριμένες ασκήσεις, καθώς και η τάση τους να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις δυο μεθόδους εναλλαχτικά, δηλαδή μερικές φορές με άμεση σύγκριση και μερικές φορές με μέτρηση και αρίθμηση.

Τρίτον, το ξεπέρασμα των ελαττωμάτων προχωρούσε αυθόρμητα και παρέμεινε αυθόρμητο. Ακόμα και όταν άρχισαν να κάνουν σωστή διάκριση ανάμεσα στη μονάδα και στην οντότητα, τα παιδιά χωρίς δισταγμό γύριζαν και ρωτούσαν: *«Πού είναι η μονάδα εδώ;»*. Ο λαθεμένος προσανατολισμός που εξαλείφθηκε ή περιορίστηκε στην πράξη, παρέμεινε στη συνείδηση των παιδιών. Οι βάσεις γι' αυτό διατηρήθηκαν σε όλες τις μεθοδολογίες.

Το γενικό, και ίσως το κυριότερο, συμπέρασμα των πειραμάτων μας είναι ότι πρέπει κανείς να διακρίνει την ποσοτική, περιγραφική προσέγγιση σε ένα πράγμα, από την επιστημονική, μαθηματική προσέγγιση σ' αυτό. Η ποσοτική πλευρά των πραγμάτων είναι ένα μόνο αντικείμενο, ένα ειδικό αντικείμενο της γνώσης. Είναι πολύ εύκολο ν' απομονωθεί· η τοποθέτηση πλάι-πλάι ομοειδών ποσοτήτων διαφόρων μεγεθών αρκεί γι' αυτό το σκοπό (μεγάλα και μικρά δένδρα, ζώα, φρούτα, σπόροι κλπ.).

Είναι γνωστό ότι τέτοιες διακρίσεις γίνονται και από τα ζώα, ένα γεγονός που επέτρεψε στους αστούς συγγραφείς να μιλάνε για τα *«φυσικά μαθηματικά»* των ζώων. Εκείνοι που υποστηρίζουν αυτή την άποψη συγχέουν το αντικείμενο της επιστήμης με την επιστήμη του αντικειμένου. Δέχονται ότι, όταν κάποιο αντικείμενο διαχωριστεί [αντιληπτικά], έχει ήδη αρχίσει η επιστημονική του έρευνα. Ωστόσο το ξεχώρισμα των ιδιοτήτων μεγέθους κάποιου αντικειμένου είναι μόνο μια προκαταρτική συνθήκη, μια προϋπόθεση, για την επιστημονική του μελέτη. Το ξεχώρισμα από μόνο του δε συνιστά μελέτη και δε δείχνει αναγκαστικά ένα προσανατολισμό προς την έρευνα. Συνεπώς η άμεση οπτική σύγκριση μεγεθών, μέσω της οποίας προχωρεί η απομόνωση της ποσοτικής πλευράς των αντικειμένων, δε συνιστά, δεν προετοιμάζει γι' αυτό και δεν προάγει τη μαθηματική, επιστημονική προσέγγιση σ' αυτό.

Η μαθηματική θεώρηση των πραγμάτων αρχίζει μόνο από τη στιγμή που η μονάδα μέτρησης εφαρμόζεται στο μέγεθος. Η ακρίβεια της μέτρησης είναι άλλο θέμα. Είναι σημαντικό η μονάδα μέτρησης να εισάγεται σαν σταθερός παράγοντας, σαν κάτι που δεν αλλάζει σε συνάρτηση με τις ποιότητες των αντικειμένων, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε καταστάσεις που έχουν να κάνουν με ποσοτική κατανομή, ανταλλαγή και εκτίμηση. Εισάγεται για να προωθήσει την τάξη – γενική, υποχρεωτική και πειστική για όλους τους συμμετέχοντες.

Για τα ζώα είναι αρκετό να κάνουν άμεση σύγκριση των μεγεθών σε ξεχωριστές περιπτώσεις. Η απομόνωση της μονάδας μέτρησης και στη συνέχεια η χρήση της για τον προσδιορισμό ίδιων μεγεθών είναι αποκλειστικά κοινωνικό φαινόμενο, όπως τα ίδια τα Μαθηματικά είναι μια από τις μορφές της επιστημονικής ιδεολογίας, μορφή της κοινωνικής γνώσης. *«Φυσικά μαθηματικά»* των ζώων δεν υπάρχουν. Η ικανότητα σύγκρισης μεγεθών και απομόνωσης των ποσοτικών διακρίσεων είναι μια φυσική προϋπόθεση των Μαθηματικών, αλλά δεν είναι η αρχή των ίδιων των Μαθηματικών.

Στο Μέρος Β΄ θα δούμε πώς στη βάση των παραπάνω γενικών σκέψεων προσδιορίζουμε μια σειρά χειρισμών που οδηγεί στη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.

Β΄ Η κύρια σειρά χειρισμών που οδηγεί στη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών

Το Μέρος Α΄ βασίστηκε στην ανάλυση των μεθόδων διδασκαλίας που ισχύουν σήμερα [1960]. Τα αποτελέσματα της πειραματικής έρευνας έδειξαν με ποιο τρόπο τα παιδιά, που έχουν μάθει ήδη να μετρούν, κατανοούν τις ποσοτικές σχέσεις. Καταλήξαμε στα εξής **συμπεράσματα**: Η κατανόηση της αρχικής έννοιας της μονάδας είναι το πιο σημαντικό βήμα στη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών (όλα οικοδομούνται επάνω στη μονάδα ή την προϋποθέτουν). Αλλά η επικρατούσα ιδέα για τη μονάδα σαν μια οντότητα (ένα ξεχωριστό πράγμα), που είναι τόσο διαδομένη στην Ψυχολογία και στη μεθοδολογία των στοιχειωδών Μαθηματικών, είναι μαθηματικά και ψυχολογικά λαθεμένη. Προσανατολίζει τα παιδιά στις οπτικά αντιληπτές ιδιότητες των μεγεθών και στην εκτίμηση των μεγεθών με άμεση σύγκριση. Ο προσανατολισμός αυτός είναι η πηγή της φαινομενικά μοναδικής φύσης των εννοιών των παιδιών για τις ποσότητες και εμποδίζει τη σωστή διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. Οι ποσοτικές διακρίσεις που αποκαλύπτονται με την άμεση σύγκριση μεγεθών αποτελούν μόνο το στόχο των Μαθηματικών. Η επιστημονική μελέτη αυτού του στόχου αρχίζει με την εκτίμηση των μεγεθών με μια μονάδα μέτρησης. Στην πραγματικότητα ο προσδιορισμός της μονάδας μέτρησης συμβαίνει πρώτα στην κοινωνική πραχτική, πράγμα που επιβεβαιώνει το γεγονός ότι τα Μαθηματικά είναι από την αρχή ένα κοινωνικό φαινόμενο.

Στη βάση αυτών των συμπερασμάτων προτείνουμε μια λύση για διάφορα άλλα άλυτα προβλήματα. Μας ενδιαφέρουν τα ερωτήματα για το ρόλο της αντίληψης και των πράξεων, ιδιαίτερα της μέτρησης, στη διαμόρφωση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών και για το ρόλο αυτών των πράξεων που κάνουν δυνατή την πλήρη διαμόρφωση αυτών των εννοιών.

Ας αποφύγουμε την παλιά διαμάχη για θέματα όπως η αντίληψη του αριθμού και του αριθμού σαν προϊόντος υπολογισμού, και το αρχικό ιδεαλιστικό τους πλαίσιο που έβλεπε την αντίληψη του αριθμού σαν άμεση θεώρηση μιας έννοιας (Μέρος Α΄).

Πρέπει να διακρίνουμε τον αριθμό από την έννοια του αριθμού. Ένας αριθμός δεν είναι έννοια, αλλά ένα σύνολο από χαρακτηριστικά μεγέθους των αντικειμένων, δηλαδή το συγκεκριμένο ποιοτικό χαρακτηριστικό μιας ομάδας, η ισχύς της. Το ερώτημα, όταν βλέπουμε μια ομάδα αντικειμένων, είναι αν μπορούμε επίσης να δούμε τα στοιχεία που συνιστούν τα αριθμητικά χαρακτηριστικά της. Αυτό δεν είναι ζήτημα που αφορά τον αριθμό των αντικειμένων που μπορούμε να δούμε. Αν σε κάποιο αντικείμενο μπορούσαμε να δούμε τον αριθμό του (ότι είναι ένα αντικείμενο) το ερώτημα θα είχε απαντηθεί υπέρ της αντίληψης. Αλλά μπορούμε να το δούμε; Μπορούμε να δούμε την ατομικότητα του αντικειμένου, αλλά η ατομικότητα δεν είναι το περιεχόμενο της έννοιας «*ένα*». Από την άποψη της θεωρίας των συνόλων (και αντίθετα με τη διαδομένη άποψη στην τρέχουσα μεθοδολογία της στοιχειώδους αριθμητικής) η ατομικότητα είναι ένα χαρακτηριστικό όχι μόνο του κάθε μοναδικού αντικειμένου αλλά και οποιουδήποτε συνόλου αντικειμένων που μπορούν να θεωρηθούν σαν μια οντότητα. Η ατομικότητα μπορεί επίσης να θεωρηθεί σαν ιδιότητα οποιασδήποτε ομάδας που συνολικά προσδιορίζεται σαν μια μονάδα, αλλά η ατομικότητα μιας ομάδας δεν την κάνει μια μονάδα. Τη διακρίνει μόνο σαν ένα σύνολο ξεχωριστό από άλλα σύνολα.

Αντίθετα με τα Μαθηματικά, που προϋποθέτουν γνώση των αριθμών και των αριθμητικών εννοιών, η Ψυχολογία και η εκπαιδευτική μεθοδολογία ασχολούνται με τη διαδικασία της διδασκαλίας των εννοιών των αριθμών στα παιδιά. Γι' αυτό το σκοπό η βασική αριθμητική έννοια της μονάδας μπορεί να περιγραφεί πολύ καλά μέσω της σχέσης του μεγέθους προς το μέτρο. Όταν θεωρηθεί με αυτό τον τρόπο, η μονάδα μέτρησης είναι απλούστατα κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος και καθόλου μια μονάδα. Ένα μετρούμενο μέγεθος είναι μόνο αυτό που είναι – κάτι τόσο μεγάλο, όχι μια μονάδα. Η ισότητα ανάμεσα σ' αυτό το μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης είναι απλά η αμοιβαία ισότητα δυο αντικειμένων. **Ωστόσο, όταν ένα αντικείμενο απομονώνεται σκόπιμα σαν μέσο για τη μέτρηση άλλων, κάθε άλλο αντικείμενο ίσο προς αυτό γίνεται – σ' αυτή τη συγκεκριμένη** σχέση του με τη **μονάδα μέτρησης – μια μονάδα.**

Το μέγεθος μια μονάδας μέτρησης δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις ποσοτικές ιδότητες του αντικειμένου που χρησιμοποιείται ως μέτρο. Μπορεί μόνο να γίνει γνωστή. Ακόμα, παρόλο που ένα άλλο αντικείμενο είναι ίσο με το αντικείμενο που χρησιμοποιείται σαν μέτρο, μόνο με τον προηγούμενο ορισμό της μονάδας μπορεί το δεύτερο αντικείμενο να ονομαστεί μονάδα. Έτσι, παρόλο που μπορούμε να δούμε όλες τις συνθήκες που ορίζουν το αντικείμενο σαν μονάδα, το ίδιο το αντικείμενο δεν είναι μια μονάδα παρά μόνο με τον ορισμό του.

Η αντίληψη μας δίνει στοιχεία για να κάνουμε κρίσεις για συγκεκριμένα μεγέθη σαν μονάδες, αλλ' αυτά τα στοιχεία είναι μόνο συνθήκες, από τις οποίες αφαιρούμε νοητικά τη μονάδα. Η αντίληψη από μόνη της δε δίνει πληροφορίες για τις μονάδες.

Ο ρόλος της μέτρησης στη διαμόρφωση των αρχικών εννοιών για τους αριθμούς απασχόλησε εξέχοντες παιδαγωγούς (Ρουσώ, Πεσταλότζι, Ουσίνσκι),[7] καθώς και προοδευτικούς πρωτοπόρους στο πεδίο της στοιχειώδους αριθμητικής (Γκόλντενμπεργκ-A.I.Goldenberg, Λάτισεφ-V.A.Latyshev κ.ά.). Όλοι τους ένοιωσαν ότι ο ρόλος της μέτρησης ήταν μεγάλος, αλλά δυο πράγματα τους εμπόδισαν να τον κατανοήσουν σωστά:

Πρώτον, το να μετρήσεις σημαίνει ν' απομονώσεις μονάδες και κατόπιν να προσδιορίσεις το πλήθος τους. Η αρίθμηση είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του αριθμού [πλήθους] των ήδη ξεχωρισμένων μονάδων. Και οι δυο πράξεις δεν οδηγούν στη διαμόρφωση των αριθμών, αλλά τους προϋποθέτουν.

Δεύτερον, αυτοί που χειρίζονταν τη στοιχειώδη αριθμητική πάντοτε όριζαν τους αριθμούς αρχίζοντας με την κατανόηση της μονάδας σαν οντότητας (ένα ξεχωριστό αντικείμενο). Παρόλο που πρόσεξαν ότι αυτό ήταν λάθος – οι πρώτες έννοιες των αριθμών που αποκτώνται μ' αυτό τον τρόπο είναι άχρηστες – αποδέχονταν ότι η μέτρηση και η αρίθμηση διόρθωναν βαθμιαία αυτά τα λάθη, απλά μέσω της δραστηριότητας, δηλαδή της δουλειάς με χειροπιαστές ποσότητες. Ακόμα, αυτή η δραστηριότητα θεωρούνταν ότι προωθούσε τη μελέτη των Μαθηματικών. Οι περισσότεροι εκπαιδευ-

7. Jean Jacques Rousseau (1712-1778) Γάλλος φιλόσοφος, Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) Ελβετός παιδαγωγός, Konstantin Ushinsky (1824-1870) Ρώσος παιδαγωγός.

τικοί θεωρούσαν τη μέτρηση μόνο σαν ένα διδακτικό βοήθημα, αλλά λίγοι απ' αυτούς (κυρίως ο Γκαλάνιν-D.D.Galanin) πίστευαν ότι η μέτρηση όχι μόνο οδηγούσε στη σωστή γνώση των αριθμών, αλλά συμπλήρωνε αυτή τη γνώση με το ουσιαστικό στοιχείο της σχέσης, χωρίς το οποίο οι αριθμοί γενικά δεν είναι αληθινοί αριθμοί. Ωστόσο ακόμα και αυτοί οι άνθρωποι έβλεπαν τη μέτρηση σαν την τελική πράξη [και όχι την πρώτη και βασική] στη διδασκαλία των στοιχειωδών εννοιών για τους αριθμούς.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονάδας σαν τη σχέση ενός μεγέθους προς μια μονάδα μέτρησης και στηριζόμενοι στην πειραματική μας έρευνα, καθώς και στην πειραματική διδασκαλία που κάναμε στις ηλικιακά ανώτερες ομάδες δυο νηπιαγωγείων της Μόσχας,[II] μπορούμε να περιγράψουμε μια σειρά (αλληλουχία) πράξεων που οδηγεί στη διαμόρφωση πολύτιμων στοιχειωδών εννοιών για τους αριθμούς.

Η μέτρηση είναι ένα αναγκαίο μέρος αυτής της αλληλουχίας και εμφανίζεται με μια ποικιλία μορφών που έχουν διαφορετικές θέσεις στους γενικούς αλγόριθμους και εκτελούν διαφορετικές λειτουργίες. Η σειρά των πράξεων περιγράφεται παρακάτω. Όπως αναφέραμε, η αυστηρά μαθηματική προσέγγιση στην έννοια του αριθμού **αρχίζει με την απομόνωση μιας μονάδας μέτρησης**.

Η πρώτη ομάδα πράξεων στην αλληλουχία σχεδιάστηκε για να εισαγάγει την ιδέα ότι η μονάδα μέτρησης δεν είναι μόνο ένα αντικείμενο με το οποίο μετρούνται τα άλλα αντικείμενα. Αυτή προκύπτει από κοινωνικές ανάγκες και συγκεκριμένες αντικειμενικές σχέσεις (σαν το αναλλοίωτο ανάμεσα σε όλες τις πιθανές αλλαγές των ενός τύπου μεγεθών). Πώς επιλέγεται και ορίζεται, ο περιορισμός της σε ορισμένο τύπο μεγεθών, η ανεξαρτησία της από τις πραγματικές οντότητες (οι οποίες μπορούν να έχουν οποιοδήποτε μέγεθος) όλα αυτά είναι σημαντικά χαρακτηριστικά της μονάδας μέτρησης.

Η δεύτερη ομάδα πράξεων σχεδιάστηκε, για να δείξει τη χρήση της μονάδας μέτρησης με το **διαχωρισμό άλλων ίδιων μεγεθών**. Εδώ είναι που για πρώτη φορά εμφανίζεται η μέτρηση με την αυστηρή έννοια του όρου – μέτρηση με αριθμό, ή και χωρίς αυτόν. Τα διαχωρισμένα μεγέθη δείχνονται σαν ίσα προς τη μονάδα μέτρησης και συνεπώς και μεταξύ τους. Είναι σαφές ότι μόνο τέτοια μεγέθη μπορούν να γίνουν αντικείμενα μαθηματικής σύγκρισης και ποσοτικής εκτίμησης.

Η τρίτη ομάδα πράξεων εισάγει τη **συγκριτική μέτρηση των μεγεθών**. Αυτές οι πράξεις αναπτύσσουν την έννοια της μέτρησης χωρίς αριθμούς, πράγμα που συμβαίνει με τις έννοιες **περισσότερα, λιγότερα, τόσα-όσα**.

Η τέταρτη ομάδα πράξεων ορίζει τη μονάδα με το **διαχωρισμό μεγεθών ίσων με τη μονάδα μέτρησης**. Ούτε η μονάδα μέτρησης ούτε το μετρούμενο μέγεθος συνιστούν μια μονάδα από μόνες τους. Δεν είναι απαραίτητο για μια μονάδα να είναι οντότητα (ούτε να έχει μέρη), ή να είναι κάτι ξεχωριστό (ούτε να είναι μέρος ενός συνόλου όμοιων μονάδων). Αυτές οι αρνητικές ιδιότητες της μονάδας είναι τόσο σημαντικές όσο και οι θετικές της ιδιότητες. Οι τελευταίες συνίστανται στο γεγονός ότι μόνο η ισότητα με το μέτρο δημιουργεί τη μονάδα του μετρούμενου μεγέθους. Με άλλα λόγια, αυτό που μετριέται και ισούται με το μέτρο είναι μια μονάδα και είναι μια μονάδα μόνο σ' αυτή τη σχέση με το μέτρο. Ασκήσεις όπως *«δώσε μου ένα τουβλάκι»* και *«φέρε μου ένα ψάρι»* σωστά ονομάζονται αρίθμηση, διότι δείχνουν το διαχωρισμό ενός μεγέθους ίσου με τη μονάδα μέτρησης και την ταξινόμηση αυτού του μεγέθους σαν μονάδας.

Η πέμπτη ομάδα πράξεων αφορά τη διαμόρφωση μεγαλύτερων αριθμών. Ο πρώτος από αυτούς είναι ο αριθμός **δύο**. Διαμορφώνεται εμπειρικά: 1 και 1 αντί για 2. Δεν μπορούμε να το δείξουμε αυτό παρά με αντικείμενα και συνεπώς πρέπει ν' απομονώσουμε τον αριθμό από τις φυσικές ιδιότητες των αντικειμένων. Γι' αυτό το σκοπό ο αριθμός χρησιμοποιείται στον υπολογισμό διαφόρων αντικειμένων καθώς και για τη μέτρηση διαφόρων μεγεθών.[III] Επειδή το 2 προκύπτει από πρόσθεση του 1 στο 1, η επόμενη πράξη πρέπει να είναι η αντίστροφη – αφαίρεση του 1 από το 1. Εναλλάσσοντας πρόσθεση και αφαίρεση προσπαθούμε ν' αναπτύ-

II. Στο Μέρος Δ΄ περιγράφεται το πρόγραμμα της πειραματικής διδασκαλίας.

III. Από την αρχή χρησιμοποιούσαμε διαφορετικά αντικείμενα και ρωτούσαμε κάθε φορά ποιά ήταν η μονάδα μέτρησης. Έτσι η συσχέτιση με το μέτρο και η διάκριση του μεγέθους από άλλες συγκεκριμένες ιδιότητες των αντικειμένων πραγματοποιούνταν ταυτόχρονα. Αναφερόμαστε σ' αυτό το θέμα πιο λεπτομερειακά στο Μέρος Γ΄.

ξουμε τη λειτουργική ευλυγισία. Το παιδί δεν πρέπει ν' αποχτήσει την εντύπωση ότι η διαμόρφωση των αριθμών γίνεται μόνο κατά τη μια κατεύθυνση. Όταν λέμε ότι *«ένα αφαιρούμενο από ένα»* δίνει **μηδέν**,[IV] εξηγούμε το μηδέν σαν την απουσία μεγέθους. Κατανοούμε πλήρως τα όρια μιας τέτοιας εξήγησης, αλλά δε γνωρίζουμε πώς αλλιώς να το εξηγήσουμε σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Κατόπιν προχωρούμε σε μια παρόμοια εμπειρική διαμόρφωση του αριθμού 3 *(2+1)*. Για να εμπλουτίσουμε την αντίληψη κάποιου γι' αυτόν τον αριθμό, χρειάζεται να δείξουμε άλλους τρόπους για να φθάσουμε στο 3 *(1+1+1, 1+2)* και να φθάσουμε σε άλλους γνωστούς ήδη αριθμούς ξεκινώντας από το 3 *(βγάλε___ από το 3)*.

Η διαφορά ανάμεσα σ' αυτή τη διαδικασία και την παραδοσιακή μελέτη της σύνθεσης ενός αριθμού είναι ότι οι ομάδες στις οποίες διασπάται ο αριθμός, καθώς και οι ομάδες από τις οποίες συντίθεται, εξετάζονται με τη βοήθεια πράξεων (πρόσθεσης και αφαίρεσης) και δε δίνονται σαν έτοιμες κατασκευές και τύποι. Έχοντας αφομοιώσει τη γνώση των αριθμών 0, 1, 2, 3 και των πράξεων μ' αυτούς, μπορούμε να γενικεύσουμε την πράξη διαμόρφωσης των αριθμών με τον κανόνα $v \pm 1$.

Είναι φανερό ότι η γνώση που προκύπτει από αυτό τον κανόνα είναι πιο αποτελεσματική από τη γνώση ξεχωριστών εμπειρικών γεγονότων και ότι απλοποιεί και διευκολύνει την εφαρμογή της γνώσης σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Το πρόβλημα είναι μέχρι πού μπορεί να εφαρμοστεί συνειδητά αυτός ο κανόνας από τα παιδιά 6-7 χρονών (όταν εφαρμόζεται ασυνείδητα, στερείται όλα του τα πλεονεχτήματα), και τι αξίζει μια τέτοια εφαρμογή; Αυτά τα ερωτήματα δεν έχουν νόημα αν ο κανόνας διδαχθεί μέσω επαγωγικών συμπερασμάτων και κατόπιν ζητηθεί η λεκτική του διατύπωση. Τον διδάξαμε με την ακόλουθη μέθοδο:

Πρώτον, επιδείξαμε αυτό τον κανόνα χρησιμοποιώντας αντικείμενα και σχέδια που επέτρεπαν στα παιδιά να δουν τις σχέσεις κάθε αριθμού με τους γειτονικούς αριθμούς, ενώ παρακολουθούσαν την εξήγηση.

Δεύτερον, δώσαμε μια απλή διάταξη για την εφαρμογή του κανόνα σε αντικείμενα στη γενική του μορφή. Εδώ το παιδί δε χρειαζόταν να διατυπώσει τον κανόνα, μόνο να δώσει την απάντηση, δηλαδή τη λεκτική πράξη σύμφωνα με τον κανόνα.

Οι επόμενοι αριθμοί 4 μέχρι 10 σχηματίζονται από το ίδιο το παιδί σύμφωνα με το ερώτημά μας: *«ποιός θα είναι ο επόμενος αριθμός;»*. Υποδείχνουμε μόνο τα ονόματα των αριθμών. Ωστόσο η διαμόρφωση της πρώτης εντύπωσης κάθε αριθμού δεν παύει να είναι αρίθμηση. Η αρίθμηση είναι ο προσδιορισμός του μεγέθους ενός συγκεκριμένου συνόλου με τη βοήθεια ενός αριθμού, μιας αντίληψης που προϋπάρχει. Αυτό στο οποίο αναφερόμαστε είναι το ζήτημα της πρώτης διαμόρφωσης μιας τέτοιας αντίληψης στη συνείδηση του παιδιού.[V]

Υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στα χαρακτηριστικά ενός αριθμού και την έννοιά του. Αυτή η διαφορά δεν προκύπτει από το γεγονός ότι ο αρχικός ορισμός είναι ανεπαρκής (όπως συμβαίνει, όταν οι αριθμοί προκύπτουν από μονάδες που έχουν το χαρακτηριστικό της ατομικότητας), αλλά από το γεγονός ότι κανένα χαρακτηριστικό δεν μπορεί να ορίσει πλήρως ένα αντικείμενο – μόνο βοηθάει να το προσδιορίσουμε. Η έννοια δεν είναι απλά το άθροισμα, ή το σύστημα των χαρακτηριστικών του αντικειμένου, αλλά μια γενικευμένη και αφηρημένη εικόνα του αντικειμένου που έχει αυτά τα χαρακτηριστικά. Μια τέτοια εικόνα προκύπτει μόνο σαν αποτέλεσμα μιας πράξης που αποκαλύπτει αυτά τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου. Συνεπώς η εφαρμογή των χαρακτηριστικών του αριθμού δε σημαίνει μόνο την πραχτική χρήση τους, αλλ' αποτελεί και ένα μέσο για τη διαμόρφωση της έννοιας, με αυτή την ειδική σημασία του όρου. Η πραχτική δεν είναι μόνο κριτήριο της αξιοπιστίας αυτών των εννοιών, αλλά και ένα μέσο για τη διαμόρφωσή τους σαν γενικευμένων και αφηρημένων εικόνων.

Συνοψίζουμε: οι στοιχειώδεις αριθμητικές έννοιες διαμορφώνονται με την ακόλουθη σειρά πράξεων.

(α) Προσδιορισμός της μονάδας μέτρησης.

(β) Διαχωρισμός ίδιων μεγεθών.

(γ) Συσχέτιση ομάδων και σχηματισμός των εννοιών *περισσότερα, λιγότερα, τόσα-όσα*.

IV. Μπορούμε ν' ακολουθήσουμε έναν άλλο τρόπο: 1, 0, 2, και 3. Το ποιος τρόπος είναι καλύτερος παραμένει ανοιχτό θέμα.

V. Εδώ η αρίθμηση μέσα στα όρια των ήδη γνωστών αριθμών χρησιμοποιείται μόνο για τη σύνθεση ομάδων αντικειμένων που κατόπιν χρησιμοποιούνται, για να δείξουν το σχηματισμό και το πρώτο περιεχόμενο *(«σύνθεση»)* του νέου αριθμού.

(δ) Ορισμός και διαφοροποίηση της μονάδας.

(ε) Σχηματισμός νέων αριθμών (και του αρχικού τους χαρακτηρισμού, επισήμανση των πρώτων τους χαρακτηριστικών) αρχίζοντας εμπειρικά *(2, 0, 3)*, και κατόπιν με αναγνώριση και κατάχτηση των κανόνων αυτής της πράξης, σχηματίζοντας τους υπόλοιπους αριθμούς μέχρι το 10.

(στ) Διαμόρφωση της έννοιας κάθε αριθμού εφαρμόζοντας τα χαρακτηριστικά του στη μέτρηση και αρίθμηση.

(ζ) Επέκταση της γνώσης κάθε αριθμού συσχετίζοντάς τον με άλλους αριθμούς.

Ο προσδιορισμός της μονάδας μέτρησης και η χρήση της για το διαχωρισμό των μεγεθών, η συσχέτιση συνόλων και η διαμόρφωση των εννοιών *περισσότερα, λιγότερα, τόσα-όσα*, είναι μαθηματικές πράξεις. Όμως προηγούνται της μέτρησης, της πρώτης αριθμητικής πράξης, και συνεπώς δεν είναι αυστηρά αριθμητικές. Γι' αυτό οι στοιχειώδεις έννοιες για τους πρώτους [=μικρούς] αριθμούς δε βασίζονται στις βασικές **αριθμητικές** πράξεις, αλλά στις συγκεκριμένες **μαθηματικές** πράξεις.

Η πρώτη εφαρμογή της μονάδας μέτρησης είναι η μέτρηση που διεξάγεται, πριν εισαχθούν οι αριθμοί, και χωρίς αυτούς. Επειδή ο ορισμός της μονάδας μέτρησης αποχτιέται από αυτή την προ-αριθμητική μέτρηση (και μέσω αυτής προκύπτουν οι ορισμοί όλων των άλλων αριθμών), η μέτρηση σ' αυτή την αρχική μορφή χρησιμεύει για την απόχτηση γνώσης για τους πρώτους αριθμούς. Αργότερα η αρίθμηση και η μέτρηση χειροπιαστών αντικειμένων οδηγεί στη διαμόρφωση των πρώτων αριθμητικών εννοιών με την αυστηρή έννοια του όρου. Η γνώση και των δυο μορφών μέτρησης και των διαφορετικών λειτουργιών τους είναι απαραίτητη για τη διαμόρφωση πλήρων εννοιών των στοιχειωδών Μαθηματικών. Όταν αυτές οι έννοιες διαμορφώνονται χωρίς τη μέτρηση, δεν είναι πλήρεις.

Είναι δύσκολο να δεχτούμε τις απόψεις ορισμένων προοδευτικών μεθοδολόγων (Γκόλντενμπεργκ, Λάτισεφ, Εγκόροφ, Αρτζενίκοφ, κ.ά.), γιατί επιδιώκουν ν' αποχτήσουν τις έννοιες των πρώτων [=μικρών] αριθμών με τη βοήθεια των πρώτων αριθμητικών πράξεων. Όταν εξαλειφθεί αυτό το λάθος, η θέση τους θα έχει μια πιο αξιόπιστη βάση. Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώνονται σαν αποτέλεσμα συγκεκριμένων πράξεων με μεγέθη (και μια σειρά απαγωγικών συλλογισμών που προκύπτουν από αυτά τα μεγέθη). Χωρίς αυτές τις πράξεις δεν μπορούν να αποχτηθούν.

Γ΄ Θεμελιακό περιεχόμενο ενός προγράμματος διαμόρφωσης των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών στη βάση της μέτρησης

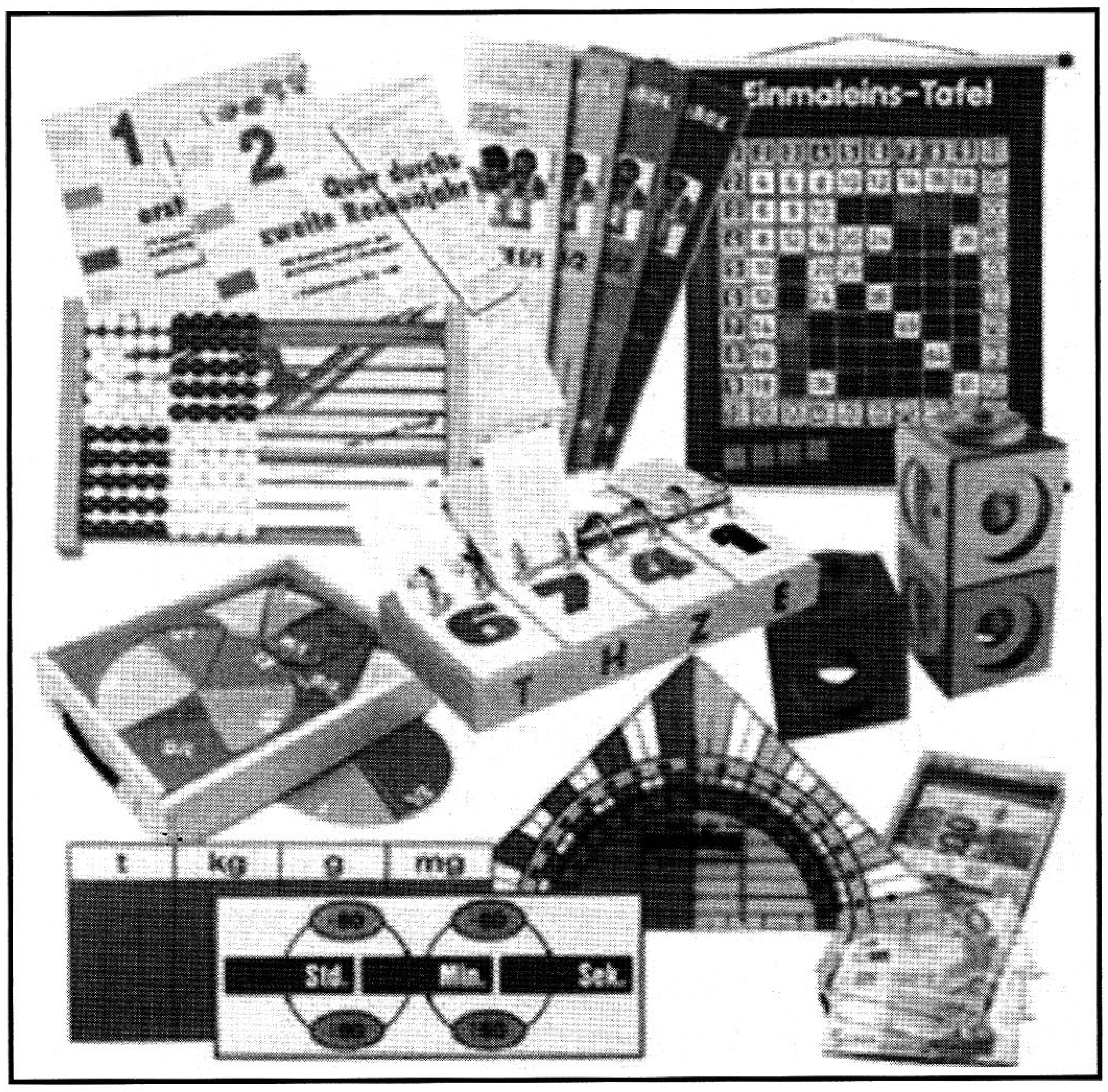
Στο Μέρος Α΄ δείξαμε ότι η λεγόμενη μοναδικότητα των παιδικών αντιλήψεων για τα μεγέθη προκύπτει από την άμεση οπτική σύγκριση των μεγεθών. Στο Μέρος Β΄ περιγράψαμε μια βασική σειρά πράξεων που βοηθούν στη διαμόρφωση των εννοιών του πρότυπου μέτρου (ή μονάδας μέτρησης), της μέτρησης, του αριθμού, και του υπολογισμού. Με τη βοήθεια των παραπάνω εννοιών διαμορφώσαμε σωστές έννοιες για τα μεγέθη και για τις ποσοτικές σχέσεις. Εδώ θα παρουσιάσουμε το κύριο περιεχόμενο του προγράμματος για μια τέτοια διαδικασία.

Το πρόγραμμα διαιρείται σε τρία μέρη:1) διαμόρφωση μιας μαθηματικής προσέγγισης στη μελέτη των μεγεθών, 2) διαμόρφωση των εννοιών μέσα στα όρια του δέκα, 3) διαμόρφωση της γενικευμένης έννοιας των σχέσεων ανάμεσα στο μέγεθος, τη μονάδα μέτρησης και τον αριθμό.

▸ **Πρώτο μέρος: Διαμόρφωση μιας μαθηματικής προσέγγισης στη μελέτη των μεγεθών.**

Όταν εκτιμώνται μαθηματικά συγκεκριμένα μεγέθη, η μονάδα μέτρησης αποκτά αποφασιστική σημασία, σαν ένα στοιχείο που μεσολαβεί ανάμεσα στο συγκεκριμένο μέγεθος και το μαθηματικό χαρακτηριστικό του, τον αριθμό. Το πρώτο πρόβλημα είναι να εξαλείψουμε τη συνήθεια να εκτιμάμε τα μεγέθη με άμεση οπτική σύγκριση και να μάθουμε να χρησιμοποιούμε τη μονάδα μέτρησης συστηματικά. Το πρώτο μέρος του προγράμματος αφιερώνεται σ' αυτό.

Πρώτα "φρεσκάρουμε" τη γνώση των παιδιών για το ρόλο της μέτρησης στην πρακτική ζωή. Επισκεπτόμαστε καταστήματα, όπου τα παιδιά παρατηρούν πώς ο πωλητής ζυγίζει το προϊόν, μετράει το ύφασμα, ή πώς οι πελάτες δοκιμάζουν καπέλα, παπούτσια, παλτά κλπ. Μετά, πίσω στο σχολείο, τα παιδιά παίζοντας παριστάνουν τις ίδιες διαδικασίες, ενώ ο δάσκαλος κάνει κατάλληλες ερωτήσεις, όπως *«Τι πρέπει να κάνεις για να μάθεις αν ___ ταιριά-*



ζει; Ποιός είναι πιο ψηλός; Ποιό ___ είναι μεγαλύτερο;» κλπ. Αν στην αρχή τα παιδιά δε γνωρίζουν πώς ν' απαντήσουν, ο δάσκαλος δίνει την κατάλληλη βοήθεια, όπως *«Δοκίμασε, μέτρησε κλπ.»*.

Μετά ακολουθεί η **επιλογή της μονάδας μέτρησης** (διαφορετικά μέτρα για διαφορετικές ποσότητες) και η **ποιοτική και ποσοτική διαφοροποίηση της μονάδας μέτρησης.** Μετράμε διάφορα πράγματα και ο δάσκαλος ρωτά: (α) *«Τι μέτρησες μ' αυτό;» - «Ποιά ήταν η μονάδα μέτρησης εδώ;»*, (β) *«Μπορείς να μετρήσεις αυτό με εκείνο;»* (για παράδειγμα, σιτάρι με ένα χάρακα ή με ένα δοχείο, ή μια ταινία με ένα κουτάλι), (γ) *«Μπορείς να μετρήσεις όλα τα πράγματα με οποιαδήποτε μέτρα;»* (**Συμπέρασμα:** Πρέπει να υπάρχει μια ειδική μονάδα για κάθε τύπο αντικειμένων).

Η διαδικασία μέτρησης εξετάζεται ειδικότερα. Οι χωρικές μετρήσεις (μήκους, επιφάνειας) πρέπει να ετοιμάζονται με ακρίβεια και να υποδείχνεται το τέλος κάθε μονάδας μέτρησης (δακτύλιοι, κουτάλια): πρέπει να γεμίσουν τελείως – ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο, κλπ. Στη διαδικασία της μέτρησης διαφόρων μεγεθών πρέπει να υπάρχει διαφοροποίηση της μονάδας μέτρησης από τις ξεχωριστές οντότητες. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε ορισμένες φορές *«ακέραιες μονάδες μέτρησης»* που είναι ξεχωριστά αντικείμενα, άλλες φορές μονάδες μέτρησης που συνίστανται από διάφορα μέρη (2 ή 3 τουβλάκια, σπίρτα, μικρά δοχεία ή κουτάλια, κλπ.), και άλλες φορές μέτρα που συνίστανται από ένα μόνο μέρος κάποιου μεγαλύτερου αντικειμένου (η μονάδα μέτρησης είναι ίση με το μισό μόνο μιας ράβδου, δοχείου κλπ.). Το υλικό που θα μετρηθεί μπορεί με τη σειρά του να συνίσταται από: (α) μέρη μικρότερα από τη μονάδα μέτρησης (*«Πρέπει να πάρουμε αρκετά τέτοια μέρη, για να φτιάξουμε τη μονάδα μέτρησης»*), (β) μέρη ίσα με τη μονάδα μέτρησης, ή (γ) μέρη μεγαλύτερα από τη μονάδα μέτρησης (το μήκος τραπεζιού, ένας κουβάς, κλπ.). Έτσι η επιλογή των μονάδων μέτρησης και του υλικού που θα μετρηθεί, καθώς και η σειρά παρουσίασης των διαφόρων ασκήσεων, απαρτίζουν ένα πολύπλοκο σύστημα που πρέπει να σχεδιαστεί.

Η μέτρηση στην αρχή διεξάγεται υλικά, κατόπιν *«με το μάτι»* (η μονάδα μέτρησης είναι ορατή, αλλά δε χρησιμοποιείται με τα χέρια), και τελικά μόνο με λεκτικό προσδιορισμό της μονάδας μέτρησης (*«Το μέτρο μας θα είναι ένα σπίρτο, ..., ένα τουβλάκι»*. Μοιράζονται σπίρτα και ξυλάκια, ή τουβλάκια και κύλινδροι, και τα παιδιά πρέπει να διαλέξουν μόνο σπίρτα ή μόνο τουβλάκια).

Ίδια μεγέθη, ξεχωρισμένα με τη βοήθεια της μονάδας μέτρησης, χρησιμοποιούνται για **συγκριτική μέτρηση συνόλων**.[2] Δίνουμε προσοχή να μη μπερδέψουμε τα στοιχεία των δυο συνόλων και να μη βρεθούμε σε μια κατάσταση όπου ένα μέγεθος αποτελείται από μέρη που μετρήθηκαν με διαφορετικές μονάδες μέτρησης ή να συγκρίνουμε μεγάθη ανομοιογενή. Η σύγκριση πρέπει να γίνεται, αφού τοποθετηθούν οι δυο μονάδες μέτρησης η μια δίπλα στην άλλη. Τα δυο σύνολα στην αρχή τοποθετούνται άτακτα. Μετά δείχνουμε ότι αυτό δεν εξυπηρετεί το σκοπό μας και τα διατάσσουμε σε δυο παράλληλες σειρές, έτσι ώστε ένα στοιχείο του πρώτου συνόλου να βρίσκεται ακριβώς απέναντι σ' ένα στοιχείο του δεύτερου. Χρησιμοποιώντας διατεταγμένα και σωστά συσχετισμένα σύνολα διαμορφώνουμε τις έννοιες *περισσότερα, λιγότερα, τόσα-όσα*, αυξάνοντας, μειώνοντας και εξισώνοντας το πλήθος των στοιχείων τους.

Τέλος εξετάζουμε τη **γενίκευση των συνόλων**. Προηγουμένως τα είχαμε προσδιορίσει με τη βοήθεια οριμένων μονάδων μέτρησης από συγκεκριμένο υλικό και συνεπώς τα σύνο-

8. Π.χ. ένα σύνολο τουβλάκια και ένα σύνολο σπίρτα. Το ζητούμενο είναι η σύγκριση του πλήθους των στοιχείων του ενός συνόλου με το πλήθος των στοιχείων του άλλου.

λα είχαν συγκεκριμένη φύση. Για να γενικεύσουμε τα σύνολα, πρώτα εισάγουμε τα ισοδύναμά τους ή υποκατάστατά τους. Γι' αυτό το σκοπό διαλέγουμε καταστάσεις όπου η υποκατάσταση γίνεται αναπόφευκτη, δηλαδή καταστάσεις όπου τα μετρούμενα μεγέθη δε διαχωρίζονται. Μετρούμε το μήκος του τραπεζιού ή του δωματίου (δεν πρέπει να κάνουμε σημάδια στο τραπέζι ή στο πάτωμα), μετρούμε νερό από ένα δοχείο σε ένα άλλο όπου τα ξεχωριστά μέρη χύνονται μαζί, κλπ. Το αποτέλεσμα είναι: *«Μετρήσαμε, αλλά δε βάλαμε σημάδια και τώρα δε γνωρίζουμε πόσα έχουμε. Έτσι τώρα για κάθε αριθμημένη μονάδα θα σημειώνουμε κάτι, για παράδειγμα θα βάλουμε στην άκρη ένα "κομμάτι". Μετά τα "κομμάτια" μας δείχνουν "πόσες μονάδες υπήρχαν". Τα "κομμάτια" μπορεί να είναι τουβλάκια, σπίρτα, κουμπιά, πινέζες κλπ.* Τα "κομμάτια" επιλέγονται σκόπιμα να είναι διαφορετικά [π.χ. σπίρτα και κουμπιά χωρίς διάκριση], έτσι ώστε η φύση τους αμέσως διαχωρίζεται από τη λειτουργία τους, που είναι να δείξει το πλήθος των μονάδων. Τα ισοδύναμα που προκύπτουν χρησιμοποιούνται για μέτρηση και αρίθμηση χωρίς αριθμούς: *«Μέτρησε (δώσε μου) τόσα "κομμάτια" όσα ___ έχω».*

Μετά ακολουθεί η γενίκευση των ισοδύναμων: *«Εδώ μετρήσαμε κάτι και βρήκαμε τόσες μονάδες»* (Δείχνουμε τα «"ομμάτια" χωρίς αναφορά του αριθμού. Δε δείχνουμε αυτό που μετρήθηκε ή πώς μετρήθηκε). Το αποτέλεσμα είναι: ένα μέγεθος (που δεν το προσδιορίζουμε) κάποιου είδους μονάδων μέτρησης κάποιου πράγματος. Χρησιμοποιώντας αυτά τα γενικευμένα ισοδύναμα επεξεργαζόμαστε πάλι τις έννοιες *περισσότερα, λιγότερα, τόσα-όσα* (αυξάνοντας, ελαττώνοντας, εξισώνοντας). Κάνοντας αυτό, ο δάσκαλος συνεχώς ρωτάει: *«Τι σημαίνει αυτό το κομμάτι (αυτά τα κομμάτια);».* Τα κομμάτια δε θεωρούνται σαν οντότητες, αλλά μόνο σαν δείκτες του μεγέθους των μονάδων που ξεχωρίστηκαν.

Η συμπλήρωση αυτού του προγράμματος ενσταλάζει στο παιδί μια σταθερή σύνδεση ανάμεσα στα προβλήματα της ποσοτικής εκτίμησης και τη μέτρηση με μια μονάδα μέτρησης, και εξασφαλίζει τη διαφοροποίηση της μονάδας μέτρησης από την ξεχωριστή οντότητα.

Στην ανώτερη ομάδα του νηπιαγωγείου το πρώτο μέρος του προγράμματος ολοκληρώθηκε σε 22 μαθήματα.

▸ **Δεύτερο μέρος: Διαμόρφωση εννοιών στα όρια του δέκα.**

Πρώτα δημιουργούμε **μια κατάσταση όπου οι αριθμοί γίνονται απαραίτητοι**, π.χ. μια κατάσταση **όπου πρέπει ν' αναρωτηθούμε**: *«Πόσα;».* Στο πρώτο μέρος όταν απευθύναμε αυτή την ερώτηση, το παιδί έπρεπε ν' απαντήσει δείχνοντας τα μετρημένα μεγέθοι ή τα ισοδύναμά τους. Εδώ όμως λέμε πράγματα, όπως: *«Πήγαινε να ζητήσεις (από το δάσκαλο) να σου δώσει τόσα ___ όσα κομμάτια είναι εδώ. Πώς μπορεί να γίνει αυτό; Έτσι»* (ακολουθεί μια εξήγηση). Βέβαια, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες διατάξεις. Το παιδί μαθαίνει έτσι ότι, για να πει *«πόσα»*, πρέπει να γνωρίζει αριθμούς και να είναι ικανό να μετράει.

Διδάσκουμε τη μονάδα με τον ορισμό της: αυτό που μετριέται και είναι ίσο με τη μονάδα μέτρησης, είναι μια μονάδα ή **ένα**. Δείχνουμε το ψηφίο: *«Εδώ έχουμε τον αριθμό **ένα**, μια μονάδα.»* (Δε διδάσκουμε τα παιδιά πώς γράφουν αριθμούς σ' αυτό το στάδιο. Χρησιμοποιούμε τυπωμένους αριθμούς). Μόλις δοθεί ο ορισμός της μονάδας, εφαρμόζεται στη μέτρηση και την αρίθμηση: *«Μέτρησε τόσα»* (δείχνουμε ένα ψηφίο). *«Φέρε ένα (ή «τόσα» - ένα αριθμό)*, *«Πόσα είναι αυτά»* (δείχνουμε αντικείμενα ή ένα αριθμό), κλπ.

Η μονάδα ορίζεται με προσοχή σαν κάτι που, όταν μετρηθεί, ισούται με τη μονάδα μέτρησης. Δίνουμε ειδικά παραδείγματα, για να δείξουμε ότι η μονάδα μέτρησης δεν είναι μια μονάδα, και τέλος ότι αυτό που μετριέται με μια μονάδα μέτρησης [και που, επειδή ισούται με αυτή τη μονάδα μέτρησης, χαρακτηρίζεται σαν μονάδα] δεν είναι μονάδα σε σχέση με μια άλλη μονάδα μέτρησης.

Όλοι οι άλλοι αριθμοί σχηματίζονται από τον κανόνα $\nu \pm 1$. Αυτά τα θέματα αναπτύσσονται με την ακόλουθη σειρά:

(α) Σχηματισμός ενός νέου αριθμού στη μέτρηση (και παρουσίαση του ψηφίου του).

(β) Εφαρμογή του αριθμού (και του ψηφίου) στη μέτρηση.

(γ) Ποσοτική αρίθμηση μιας σειράς αντικειμένων και προς τις δυο κατευθύνσεις (από αριστερά προς τα δεξιά και από δεξιά προς τα αριστερά) και επίδειξη ότι *«από όπου και ν' αρχίσεις την αρίθμηση θα βρεις το ίδιο ποσό».*

(δ) Ταχτική αρίθμηση [1ος, 2ος, 3ος, ...] μιας σειράς αντικειμένων, πάλι προς τις δυο κατευθύνσεις με επίδειξη του γεγονότος ότι *«τώρα δεν είναι το ίδιο!»* και με διαφοροποίηση της ποσοτικής και της ταχτικής αρίθμησης. Η μια αφορά το *«πόσα»*, ενώ η άλλη την τάξη του αριθμού.

(ε) Ανάπτυξη της ιδέας του *«τι προηγείται και τι έπεται»*.

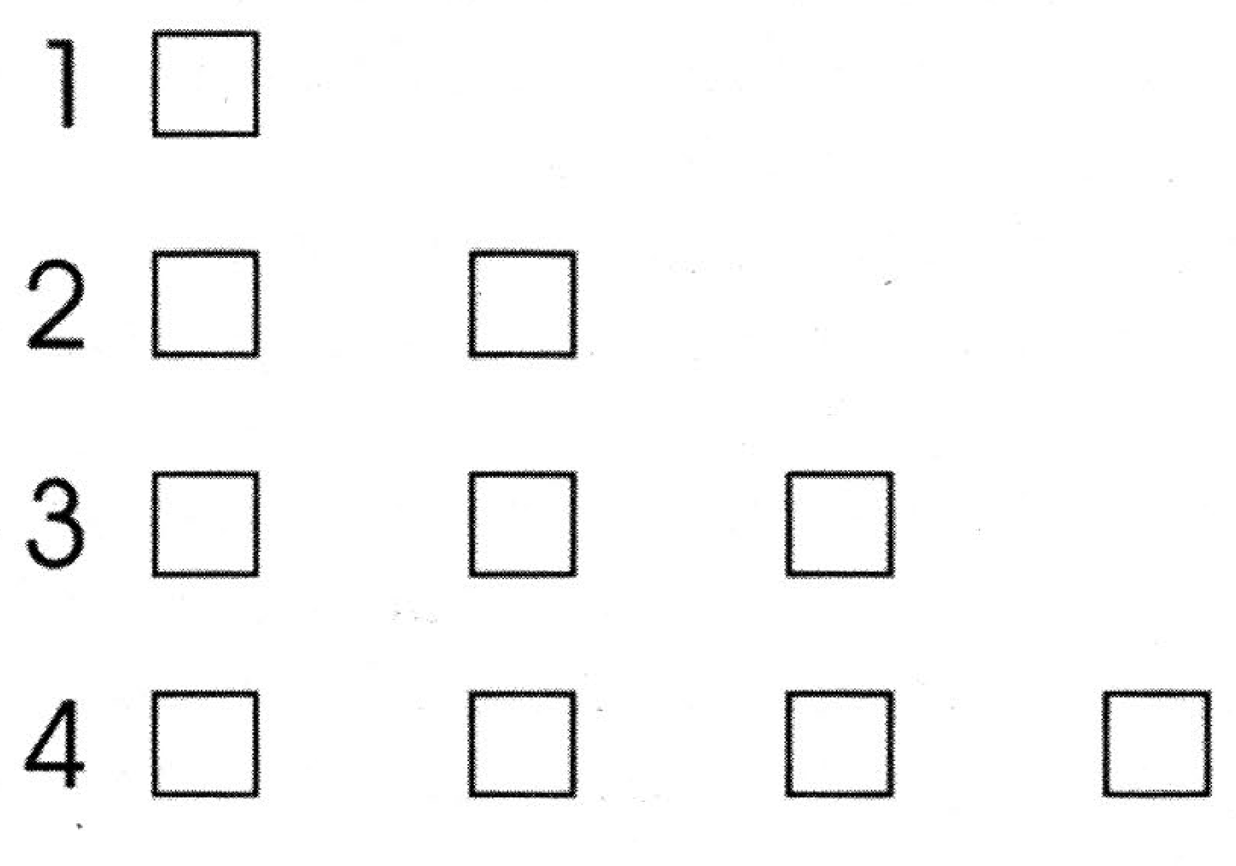
(στ) Πρόσθεση και αφαίρεση στα όρια ενός δοσμένου αριθμού. Αρχίζοντας με τον αριθμό 3, εξετάζονται διάφοροι συνδυασμοί αριθμών (μέχρι το δοσμένο αριθμό), αλλά ακριβώς με την πρόσθεση και αφαίρεση, και όχι απλά με τη *«σύνθεση του αριθμού»*.

(ζ) Σ' αυτή τη βάση συνεχίζεται η μελέτη του *«τι είναι περισσότερα, τι είναι λιγότερα»*.

(η) *«Πόσα περισσότερα, λιγότερα»* με ένα ή δυο γειτονικούς αριθμούς.

Μετά το 1 εξετάζονται οι αριθμοί 2, 0, 3 (βλ.Μέρος Β΄) και στη βάση αυτών των τεσάρων αριθμών εισάγουμε τον **κανόνα σχηματισμού των αριθμών**.

Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο: Απλώνουμε τα ψηφία αριστερά και *«κομμάτια»* (αντίστοιχα στον αριθμό) δεξιά, έτσι ώστε κάθετα τα ψηφία και τα κομμάτια να είναι το ένα κάτω από το άλλο και οι γραμμές να κάνουν σκαλοπάτια.



Χρησιμοποιώντας μια τέτοια εικόνα είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάθε αριθμός είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό που προηγείται και κατά ένα μικρότερος από τον αριθμό που έπεται. Τα παιδιά δεν απομνημονεύουν [μηχανικά] αυτό τον τύπο, αλλά απαντούν στις σχετικές ερωτήσεις, αφού κοιτάξουν την εικόνα, και αργότερα χωρίς αυτή. Αν δεν μπορούν να θυμηθούν, τους δείχνουμε πάλι την εικόνα.

Αφού αφομοιωθούν τα παραπάνω, προχωρούμε στη γενίκευση του κανόνα. Παίρνουμε ένα σύνολο αντικειμένων, κάτι που να ξεπερνάει τον αριθμό που μελετήσαμε (10-15 κομμάτια) και λέμε: *«Εδώ έχουμε ένα αριθμό αντικειμένων. Πώς σχηματίζουμε τον επόμενο αριθμό; Δείξε μου με αντικείμενα. Τι να κάνω για να βρω τον επόμενο (ή τον προηγούμενο) αριθμό;»* Το παιδί πρέπει να προσθέσει (ή ν' αφαιρέσει) ένα αντικείμενο στην ομάδα που βλέπει. Αν δεν μπορεί να το κάνει, ξαναγυρνάμε στην εικόνα με τα σκαλοπάτια, υπενθυμίζουμε τον κανόνα και καταλήγουμε: *«Αυτό σημαίνει ότι εδώ θα είναι ένα παραπάνω (ή πιο λίγο)»*.

Η μη αριθμημένη ομάδα αντικειμένων αντιπροσωπεύεται υλικά από ***ν*** και η πρόσθεση ή αφαίρεση ενός αντικειμένου αποδείχνει χειροπιαστά τον κανόνα *±1*. Αρχίζοντας με το 4, κάθε επόμενος αριθμός σχηματίζεται από το παιδί σύμφωνα με το γενικό κανόνα. Αφού το κάνει αυτό, του λέμε το όνομα του αριθμού και του δείχνουμε γραμμένο το ψηφίο. Κατόπιν ο νέος αριθμός εξετάζεται ακολουθώντας τα βήματα *(α)-(η)*. Μετά τον τρίτο αριθμό η ανάπτυξη αυτών των βημάτων γίνεται πιο γρήγορη και πιο εύκολη με κάθε νέο αριθμό, μια και όλοι τους εκτός από ορισμένους αριθμούς που συνθέτουν ένα νέο αριθμό, είναι εφαρμογή ενός ήδη γνωστού αριθμού σε μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Το δεύτερο μέρος του προγράμματος περιλαμβάνει 38 μαθήματα.

▸ **Στο τρίτο μέρος μελετάμε τις σχέσεις ανάμεσα στο μέγεθος, τη μονάδα μέτρησης και τον αριθμό σε γενικευμένη μορφή.**

Με μια σειρά ασκήσεων δείχνουμε στα παιδιά ότι δεν πρέπει να συγκρίνουμε τους αριθμούς που προκύπτουν από μέτρηση διαφορετικών μεγεθών (π.χ. μήκος και βάρος, ή βάρος και όγκο) και ότι δεν πρέπει να συγκρίνουμε αριθμούς αν τα μεγέθη που αυτοί αντιπροσωπεύουν μετρούνται με διαφορετικές μονάδες.[9]

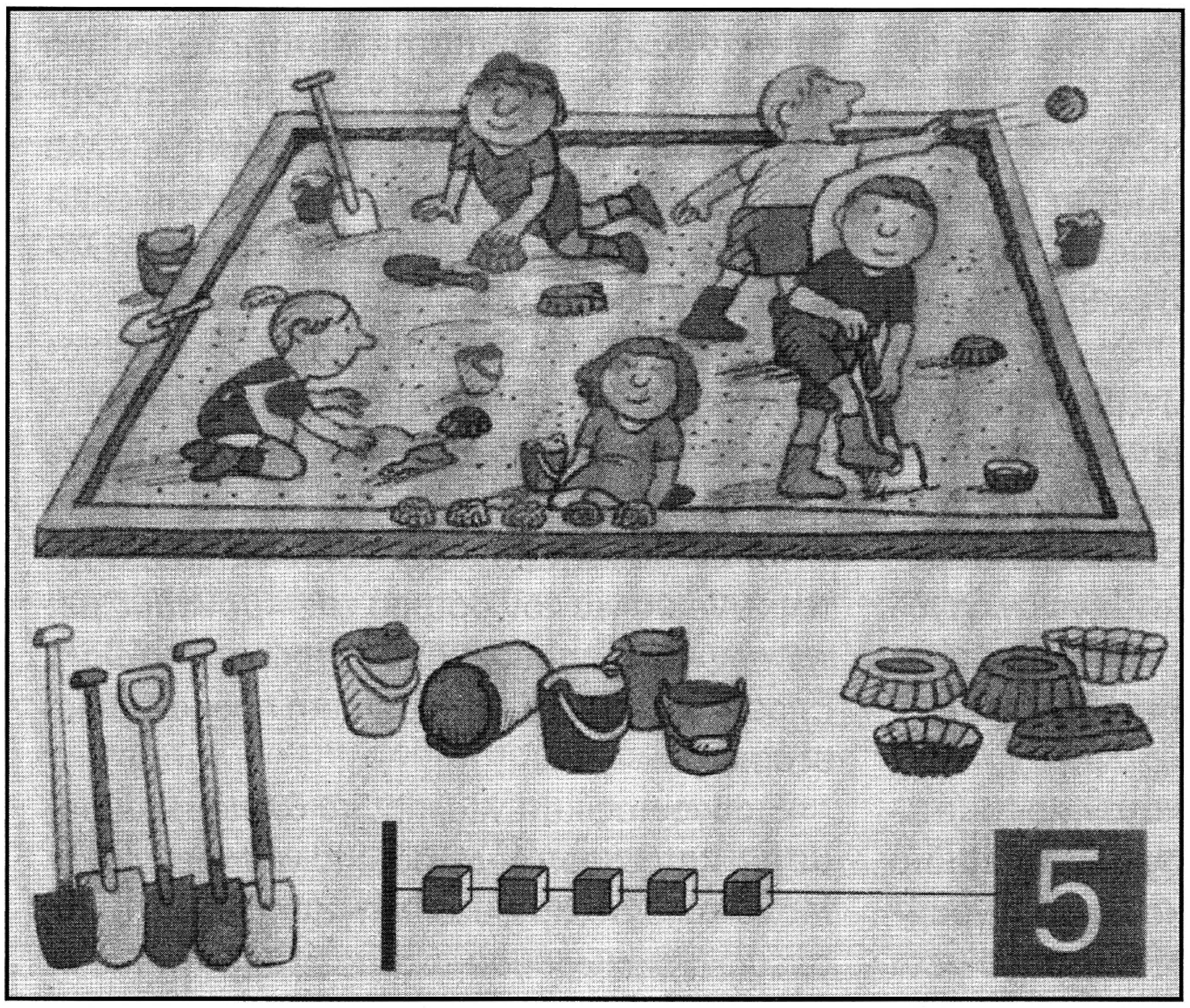
Κατόπιν μελετάμε τις εξής σχέσεις:

(α) Πώς αλλάζει ένας αριθμός, αν το μέγεθος μένει το ίδιο, αλλά η μονάδα μέτρησης μεγαλώσει (ή μικρύνει); Αν η μονάδα μέτρησης δεν αλλάζει αλλά το μέγεθος αυξηθεί (ή μειωθεί);

(β) Αν η μονάδα μέτρησης μεγαλώσει (ή μικρύνει), πώς πρέπει ν' αλλάξει το μέγεθος για να μείνει ίδιος ο αριθμός;

(γ) Αν το μέγεθος αυξηθεί (ή μειωθεί), πώς

9. Π.χ. Ι: Ας υποθέσουμε ότι μετράμε δυο μήκη, το πρώτο με μονάδα μέτρησης το χιλιόμετρο και το δεύτερο με μονάδα μέτρησης το μέτρο. Τα αποτελέσματα της μέτρησης είναι 2 και 15 μονάδες αντίστοιχα. Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε αυτούς τους δύο αριθμούς, για να συμπεράνουμε ποιο μήκος είναι μεγαλύτερο.



πρέπει ν' αλλάξει η μονάδα μέτρησης για να μείνει ίδιος ο αριθμός;

Όλα τα προβλήματα λύνονται επανειλημμένα με διαφορετικά μεγέθη. Τέλος φτάνουμε σε συμπέρασμα, που στην αρχή το παρουσιάζουμε σαν ένα πρόβλημα: όταν μετράμε κάποιο μέγεθος, όσο μεγαλύτερη είναι η μονάδα μέτρησης τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός, και αντίστροφα, όσο μικρότερη είναι η μονάδα μέτρησης τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός. Ο αριθμός δείχνει τα μεγέθη – αν είναι μεγάλο ή μικρό – όχι άμεσα, αλλά μέσω της μονάδας μέτρησης.

Το τρίτο μέρος είχε συνολικά 6 μαθήματα.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία οδηγεί συστηματικά στην αποφυγή της εκτίμησης των μεγεθών στη βάση των ορατών χαρακτηριστικών τους, όπως γινόταν προηγουμένως, και διαμορφώνει λογικά μια σειρά έννοιες – **μέτρηση, μονάδα μέτρησης, αντιστοίχιση ένα προς ένα, μεγαλύτερο, λιγότερο, τόσα-όσα, μονάδα**, κλπ.

Αυτή η μεθοδολογία δείχνει τις πράξεις που απαιτούνται, για να οριστεί κάθε μια από αυτές τις έννοιες με ακρίβεια, και τις διαφοροποιεί από τις έννοιες που σχηματίστηκαν πριν από το επιστημονικό πείραμα. Όλες οι έννοιες και οι πράξεις μαθαίνονται χωρίς [μηχανική] απομνημόνευση, καθώς εφαρμόζονται, και οι αφηρημένοι κανόνες υποστηρίζονται από υλικά μοντέλα.

Τα αποτελέσματα της διαμόρφωσης των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών παρουσιάζονται στο Μέρος Δ΄.

Δ΄ Τα αποτελέσματα της διαμόρφωσης στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών με μια μεθοδολογία βασισμένη στη μέτρηση

Κατά το σχολικό έτος 1959-΄60 διδάξαμε τη διαμόρφωση των στοιχειωδών Μαθηματικών εννοιών σε 50 παιδιά από τις ανώτερες ηλικιακά ομάδες των ίδιων νηπιαγωγείων που χρησιμοποιήσαμε κατά την πρώτη μας έρευνα. Χρησιμοποιήσαμε μια μεθοδολογία βασισμένη στις έννοιες της μονάδας μέτρησης, της μέτρησης, και του αριθμού σαν σχέσης ανάμεσα στο μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης (βλ. Μέρη Α΄, Β΄, Γ΄). Συνολικά κάναμε 68 μαθήματα (τα μαθήματα γίνονταν 2-3 φορές την εβδομάδα). Κάθε μάθημα διαρκούσε το πολύ 30 λεπτά και γινόταν με τη μορφή συζήτησης. Τα μαθήματα διεξάγονταν μόνο με ολόκληρη την ομάδα. Δεν υπήρξαν συμπληρωματικά μαθήματα για τα παιδιά που βραδυπορούσαν ή για εκείνα που έχασαν κάποιο μάθημα.

Πριν αρχίσουμε τα μαθήματα, ελέγξαμε τις γνώσεις των παιδιών στην αριθμητική, σε σχέση με τις απαιτήσεις του διδακτικού προγράμματος. Όπως και στην προηγούμενη έρευνα, η γνώση των περισσότερων παιδιών ξεπερνούσε το πρόγραμμα: όλα τα παιδιά μετρούσαν *«προς τα εμπρός»* μέχρι το 10 (30 παιδιά μέχρι το 20 και 25 παιδιά μέχρι το 100), 27 παιδιά μπορούσαν να μετρήσουν *«προς τα πίσω»* από το 10, άλλα 17 παιδιά από το 20, και μόνο 14 παιδιά δεν μπορούσαν να μετρήσουν προς τα πίσω από το 5. Όλα γνώριζαν ποσοτική αρίθμηση. Όλα γνώριζαν ποιός από τους γειτονικούς αριθμούς ήταν μεγαλύτερος και ποιός μικρότερος. 46 παιδιά γνώριζαν ποιός αριθμός *«έπεται»* και ποιός *«προηγείται»*. 23 παιδιά μπορούσαν να δείξουν τη σύνθεση ενός αριθμού χρησιμοποιώντας αντικείμενα, και 19 παιδιά χωρίς αντικείμενα.

Πριν αρχίσουμε τη διδασκαλία πραγματοποιήσαμε ορισμένα συγκριτικά πειράματα ελέγχου. Εκτός από τα παιδιά της ομάδας «Β» που θα παρακολουθούσαν τα μαθήματά μας (αρχή σχολικού έτους 1959-'60) κάναμε τα ίδια πειράματα με παιδιά της ανώτερης ηλικιακά ομάδας «Α» του προηγούμενου σχολικού έτους (1958-'59) που **είχαν τελειώσει το νηπιαγωγείο** χωρίς να έχουν εκπαιδευθεί με τη μεθοδολογία μας. Τα ίδια πειράματα έγιναν αργότερα με τα παιδιά της ομάδας «Β» και μετά το πέρας της διδασκαλίας με τη μεθοδολογία μας (την άνοιξη του 1960).

Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Η γραμμή *«Β πριν»* αφορά τα παιδιά της ομάδας «Β» πριν τη διδασκαλία και η γραμμή *«Β μετά»* αναφέρεται στην ίδια ομάδα μετά το πέρας της διδασκαλίας. Για κάθε άσκηση οι αριθμοί δίνουν το ποσοστό (%) των παιδιών που δώσανε σωστή λύση.

Η σύγκριση έδειξε ότι η γενικά αποδεκτή μεθοδολογία διδασκαλίας δε βελτιώνει την ποιότητα των μαθηματικών αντιλήψεων των παιδιών, και ότι αυτό που τελικά οδηγεί τα παιδιά στη σωστή θεώρηση των ποσοτικών σχέσεων είναι κυρίως η πρακτική [εξάσκηση] στην αρίθμηση.

Συναντήσαμε διάφορες δυσκολίες στην πορεία της διδασκαλίας:

(α) Το νέο διδακτικό υλικό – σπόροι, διάφορα μικρά αντικείμενα και ταινίες χαρτί – στην αρχή αποσπούσε την προσοχή των παιδιών από την αυστηρά μαθηματική πλευρά του ζητήματος. Ξεπεράσαμε αυτή τη δυσκολία ζητώντας από τα παιδιά αρκετές ημέρες πριν τα μαθήματα να "παίξουν" με το υλικό, ώστε να εξοικειωθούν μ' αυτό και μετά να μπορούν να το χρησιμοποιήσουν ήσυχα για διδακτικούς σκοπούς.

(β) Πολλά παιδιά στην αρχή δεν μπορούσαν να μείνουν σε "εργασιακή κατάσταση" για πολλή ώρα. Η ατομική ενθάρρυνση και τα σχόλια δε βοηθούσαν, αλλά η σύγκριση με άλλα παιδιά και παρατηρήσεις για τη δουλειά εκείνων που αποσπώνταν αποδείχτηκαν αποτελεσματικά.

(γ) Στην αρχή έπρεπε να παλαίψουμε υπομονετικά με την αρίθμηση ξεχωριστών οντοτήτων, που είχε εμπεδωθεί από τον προηγούμενο τρόπο διδασκαλίας.

(δ) Συχνά τα παιδιά δεν είχαν τις απαραίτητες έννοιες για τον ορισμό της *«μονάδας μέτρησης»* (για παράδειγμα, μετρώντας *«ζώα»).* Έπρεπε να τους δώσουμε ειδική προκαταρτική εξάσκηση.

Εισάγοντας κάτι νέο, πρώτα δημιουργούσαμε μια κατάσταση όπου αυτό το νέο χρειαζόταν. Μόνο τότε δίναμε μια εξήγηση γι' αυτό και αμέσως προχωρούσαμε στην εφαρμογή του με διάφορες ασκήσεις.

Όπως φαίνεται στον πίνακα (σειρά *«Β μετά»),* μετά τη διδασκαλία όλα τα παιδιά έλυσαν 10 ασκήσεις, 6 παιδιά δεν μπόρεσαν να λύσουν δυο ασκήσεις και 1 παιδί δεν έλυσε την τελευταία άσκηση. Συνολικά υπήρξαν 5 παιδιά που δεν μπόρεσαν να λύσουν όλα τα προβλήματα, αλλά δεν απέτυχαν όλα και στα 5 προβλήματα. Σημειώνουμε ότι και τα 5 αυτά παιδιά είχαν ειδικά προβλήματα, αλλά παρόλο που δεν έκαναν συμπληρωματικά μαθήματα (στο σχολείο και στο σπίτι) μπόρεσαν να λύσουν σωστά 10 ασκήσεις και απέτυχαν μόνο σε μερικές από τις υπόλοιπες 5.

Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου μας είναι ότι η ποσοτική εκτίμηση απαιτείται από τα παιδιά πρώτα στρέφοντας την προσοχή τους στη *«μονάδα μέτρησης»* και κατόπιν στην αρίθμηση των μονάδων που ξεχωρίσανε. Η έννοια της μονάδας μέτρησης απελευθέρωσε τα παιδιά από την υποχρέωση να προσδιορίσουν

Ομάδα	Αριθμός άσκησης														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Α	47	78	52	47	18	8	47	33	32	17	42	25	68	52	55
Β πριν	42	44	36	28	18	4	26	40	44	24	38	22	52	40	32
Β μετά	100	100	100	100	100	100	100	100	100	92	92	96	100	96	98

το μέγεθος με οπτική εκτίμηση. Όταν τους δινόταν οποιαδήποτε άσκηση να προσδιορίσουν ένα μέγεθος με ποιοτικές σχέσεις, τα παιδιά πρώτα ρωτούσαν *«Ποιά θα είναι η μονάδα μέτρησης;»* Μόνο αφού λάμβαναν αυτή την πληροφορία μετρούσαν τις μονάδες. Το γεγονός ότι οι μετρούμενες μονάδες, καθώς και η ίδια η *«μονάδα μέτρησης»* απαρτιζόταν από μέρη, καθόλου δεν μπέρδεψε τα παιδιά. Διαχώρισαν ή πρόσθεσαν το υλικό, για να φτιάξουν μια πλήρη μονάδα, και, όταν ο πειραματιστής άλλαζε το μέτρο, άλλαζαν και οι μονάδες αντίστοιχα. Αν περίσσευε κάτι μικρότερο από τη μονάδα μέτρησης, τα παιδιά το αγνοούσαν (μερικά είπαν: *έχουμε τόσα και μισό,* για το υπόλοιπο).

Η εκτίμηση της ποσότητας με όρους μονάδας μέτρησης εξαφάνισε τις προηγούμενες έννοιες των αριθμών σαν ξεχωριστών οντοτήτων, καθώς και άλλων χωρικών δειχτών των μεγεθών. Τα παιδιά συσχέτισαν το μέγεθος με τη μονάδα μέτρησης, βρήκαν τις μονάδες που ήταν ίσες με τη μονάδα μέτρησης και αριθμώντας τις έφτασαν στο σωστό αποτέλεσμα.

Η αρίθμησή μας δεν προσδιοριζόταν μόνο με την *«παράθεση των μονάδων μέτρησης».* Βέβαια πάντοτε η αρίθμηση προσδιόριζε μια πράξη, δηλαδή περιλάμβανε τη διαδικασία σχηματισμού αριθμών. Έτσι δεν είχαμε ιδιαίτερο πρόβλημα να διδάξουμε τη λεγόμενη μέτρηση του αποτελέσματος (ποσοτική). Η διαδικασία σχηματισμού αριθμών έκανε καθαρή την εφαρμογή του αριθμού στην ταχτική αρίθμηση. Σε ασκήσεις όπου τα παιδιά είχαν να προσδιορίσουν *«ποιός αριθμός»* (μετρώντας), ρωτούσαν πάντοτε: *«Από ποιά μεριά πρέπει ν' αρχίσουμε την αρίθμηση;».*

Τα παιδιά έβλεπαν τον ίδιο τον αριθμό σαν σχέση ανάμεσα στο μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης. Έβλεπαν αυτή τη σχέση σαν μια διαδικασία μέτρησης ή *«συσσώρευσης»* μονάδων μέτρησης σε ένα δοσμένο μέγεθος. Συγκρίνοντας μεγέθη από τους αριθμούς τους τα παιδιά – ιδίως στην αρχή της διδασκαλίας – συχνά επέδειξαν αυτή την επίγνωση. *«Αχά, εδώ το μέτρο ταιριάζει 3 φορές, ενώ εδώ 2 φορές. Άρα αυτό είναι μεγαλύτερο κατά ένα!».*

Η ακριβής έννοια του αριθμού επέτρεπε στα παιδιά να τον χρησιμοποιούν για εκτίμηση άλλων μεγεθών – χρόνου, ηλικίας, απόστασης – πράγμα που θεωρείται πολύ δύσκολο για παιδιά αυτής της ηλικίας.

Η χρήση αραβικών ψηφίων (τα παιδιά δεν τα έγραφαν, αλλά χρησιμοποιούσαν τυπωμένους αριθμούς σε ξεχωριστές κάρτες) δεν εμπόδισε τη διδασκαλία. Αντίθετα, έδωσε στα παιδιά ένα νέο ενδιαφέρον παιχνίδι. Βάζανε τους αριθμούς σε γραμμές και έφτιαχναν για τον εαυτό τους ή για τα άλλα παιδιά προβλήματα μέτρησης, πρόσθεσης, αφαίρεσης, κλπ.

Αναγνωρίζεται ότι η συνηθισμένη μέθοδος διδασκαλίας της σύνθεσης ενός αριθμού απαιτεί πολύ χρόνο και προσπάθεια. Τα παιδιά αναγκάζονται να απομνημονεύσουν ξεχωριστούς συνδυασμούς (όχι πάνω από τρεις συνδυασμούς για κάθε αριθμό μέχρι το 10) και κατόπιν στις πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης δεν τις πολυχρησιμοποιούν, και πρέπει πάλι να διδαχτούν να εφαρμόζουν τη γνώση τους για τη σύνθεση του αριθμού.

Τα παιδιά μας δεν απομνημόνευσαν τη σύνθεση αριθμών, αλλά χρησιμοποιώντας τις πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης με κάθε νέο αριθμό (επαναλαμβάνοντας όλους τους αριθμούς που είχαν μάθει πιο πριν) έμαθαν εύκολα όλες τις δυνατές συνθέσεις των αριθμών. Δεν ακολουθούσαν απομνημονευμένες συνθέσεις, αλλά έκαναν γρήγορα πρόσθεση και αφαίρεση και με τη βοήθεια αυτού του υπολογισμού προσδίοριζαν διάφορες ομάδες για ένα δοσμένο αριθμό. Η σύνθεση του αριθμού προέκυψε σαν το αποτέλεσμα μιας λίγο-πολύ αυτόματης αριθμητικής πράξης. Έτσι εξαφανίστηκε και η δυσκολία της σύνθεσης των αριθμών.

Η χρήση *«σύνθετων μονάδων μέτρησης»* έπαιξε μεγάλο ρόλο εδώ, πράγμα που είχαμε προηγουμένως αγνοήσει. Έχοντας αποκτήσει μια μονάδα μέτρησης το παιδί τη μετρούσε σε ένα δοσμένο μέγεθος. Ας δούμε ένα παράδειγμα, όπου *Π=Πειραματιστής, Υ=Υποκείμενο (παιδί):*

Π: *Εδώ έχουμε τον αριθμό 8* (8 χάντρες στον άβακα τοποθετούνται στο πλάι).

Η μονάδα μέτρησης είναι αυτή (δείχνει 3 χάντρες σε μια άλλη σειρά του άβακα).

Υ: (Μετράει) *Ένα, η μονάδα μέτρησης ταιριάζει* (ξεχωρίζει 3 χάντρες), *δυο, η μονάδα μέτρησης ταιριάζει* (ξεχωρίζει άλλες 3 χάντρες και τις βάζει πιο πέρα από τις πρώτες 3), *και η μονάδα μέτρησης δεν χωράει άλλο.*

Π: *Από ποιους αριθμούς αποτελείται ο αριθμός 8;*

Υ: *Από 3 χάντρες, άλλες 3 χάντρες, και 2* *ακόμα χάντρες.*

Π: *Τώρα η μονάδα μέτρησης είναι 4.*

Υ: *Ένα, η μονάδα μέτρησης ταιριάζει, και δυο, η μονάδα μέτρησης ταιριάζει.*

Π: *Τώρα από ποιούς αριθμούς αποτελείται ο αριθμός 8;*

Υ: *Από 4 και 4.*

Έτσι η αντιληπτή σύνθεση του αριθμού προέκυψε με διαφορετικούς τρόπους. Απρόβλεπτη και χωρίς να προβλεφθεί από εμάς, η εφαρμογή των *«σύνθετων μονάδων μέτρησης»* οδήγησε:

Πρώτον, σε διπλό μέτρημα, πράγμα σημαντικό για τη διδασκαλία που ακολούθησε *(πόσες φορές μια τέτοια μονάδα μέτρησης ταιριάζει, και πόσα ολόκληρα μέρη έχει αυτή η μονάδα μέτρησης)*, και

Δεύτερον, σε πραγματικό πολλαπλασιασμό και διαίρεση (χωρίς ωστόσο να ονομάσουμε αυτές τις πράξεις, διότι καθόλου δε σκοπεύαμε να τις διδάξουμε στα παιδιά!).

Έτσι, για παράδειγμα είπαμε: *«Η μονάδα μέτρησης θα είναι αυτή* (δυο ξυλάκια). *Πάρε τόσα* (αντικείμενα), *όσα χρειάζονται για να κάνεις 4 μονάδες μέτρησης»*. Το παιδί παίρνει 8 αντικείμενα. Αυτό είναι πολλαπλασιασμός 2 x 4. Άλλο παράδειγμα: Ο πειραματιστής ρωτάει: *«Εδώ έχουμε τον αριθμό 8* (δείχνει χάντρες στον άβακα). *Πες μου πόσες φορές αυτό το μέτρο* (δείχνει 3 χάντρες) *περιέχεται σ' αυτόν»*. Το παιδί ξεχωρίζει 3 χάντρες, μετά άλλες 3, και λέει: *«3 περιέχονται 2 φορές και εδώ η μονάδα μέτρησης δεν ταιριάζει – μένουν 2 χάντρες»*. Εδώ γίνεται διαίρεση (με υπόλοιπο).

Έτσι δεν αποτελεί έκπληξη που τα παιδιά μας μετρούσαν, πρόσθεταν και αφαιρούσαν, όχι μόνο ένα-ένα, αλλά με ομάδες επίσης. Δεν πραγματοποιούσαν την πράξη σε δυο βήματα, όπως κάνουν τα παιδιά που διδάχτηκαν με τη συνηθισμένη μεθοδολογία, (2, 2 και 2, και μόνο κατόπιν από ειδική εντολή τα συνδυάζουν), αλλά αμέσως: *«2 ... 4... 6»*. Το ίδιο ίσχυε και για την αφαίρεση.

Έτσι οι βασικές αριθμητικές πράξεις – αρίθμηση (σε όλες τις παραλλαγές), πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση – δε διδάχτηκαν η μια μετά την άλλη, αλλά ταυτόχρονα, και σε πολύ ευρύτερο πεδίο απ' ό,τι απαιτεί το πρόγραμμα του νηπιαγωγείου. Επιπλέον αυτό διευκόλυνε τη διδασκαλία. Τέλος σημειώνουμε ότι η εφαρμογή της μονάδας μέτρησης με σαφή εννοιολογικό χαρακτηρισμό (*«ένα μπλε τουβλάκι»* αντί *«οποιοδήποτε τουβλάκι»*, *«σκύλοι»* αντί *«ζώα»*, κλπ.) οδήγησε στην ακριβή εφαρμογή των αριθμητικών πράξεων σε συγκεκριμένες καταστάσεις και βοήθησε στη μετάβαση στο επίπεδο επίλυσης προβλημάτων.

Παρά τις δυσκολίες που συνδέονται με την επανεκπαίδευση και με την έλλειψη εννοιών, σε ένα χρόνο τα παιδιά με τη μεθοδολογία μας καταχτήσανε ένα πεδίο γνώσης που ξεπερνούσε σημαντικά τις απαιτήσεις του προγράμματος για την ηλικία των 6,5-7 χρονών. Το κύριο εδώ είναι η **συνειδητή** μάθηση των μαθηματικών εννοιών και πράξεων. Τα παιδιά σε όλες τις περιπτώσεις κατανοούσαν ακριβώς τι ήταν η μονάδα μέτρησης. Πίσω από τον αριθμό έβλεπαν τη διαδικασία της μέτρησης κάποιου πράγματος και την αρίθμηση. Πίσω από την αριθμητική πράξη έβλεπαν ορισμένη κατεύθυνση ή μια συγκεκριμένη μέθοδο εκτέλεσης της πράξης μετά τη μέτρηση.

Αυτά τα πειράματα επιβεβαίωσαν τις γνώμες και τις ελπίδες των μεγάλων εκπαιδευτικών Ρουσώ, Πεσταλότζι, και Ουσίνσκι (βλ. Μέρη Α΄ και Β΄): Όταν η διδασκαλία των στοιχειωδών Μαθηματικών βασίζεται στη μέτρηση, προχωρεί με εξαιρετική ταχύτητα και αποδοτικότητα. Το ενδιαφέρον των παιδιών στο αντικείμενο διατηρείται εναργές και τα παιδιά αποκτούν κίνητρα για παραπέρα επιτεύγματα. □