Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

С. В. ФОМИН

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 40

С. В. ФОМИН

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.131
Ф76
УДК 511.2(021)

Фомин С. В.

Ф 76 Системы счисления. — 5-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 48 с. — (Попул. лекции по мат.)

5 коп. 127 000 экз.

В брошюре рассказывается об истории возникновения, свойствах и применении различных систем счисления: десятичной, двоичной и некоторых других. В связи с двоичной системой счисления даются элементарные сведения о вычислительных машинах.

4-е изд. — 1980 г.
Для учащихся старших классов средней школы.

Ф $\dfrac{1702030000-070}{053(02)-87}$ 47-87 **ББК 22.131**

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Язык чисел, как и обычный язык, имеет свой алфавит. В том языке чисел, которым сейчас пользуются практически на всем земном шаре, алфавитом служат десять цифр, от 0 до 9. Этот язык называется десятичной системой счисления. Однако не во все времена и не везде люди пользовались десятичной системой. С точки зрения чисто математической она не имеет специальных преимуществ перед другими возможными системами счисления, и своим повсеместным распространением эта система обязана вовсе не общим законам математики, а причинам совсем иного характера.

В последнее время с десятичной системой серьезно конкурируют двоичная и отчасти троичная система, которыми «предпочитают пользоваться» современные вычислительные машины.

О свойствах, истории возникновения и применении различных систем счисления будет рассказано в этой книжке. Ее чтение не требует математических познаний, выходящих за пределы школьной программы.

* *
*

Во втором издании добавлены два новых параграфа (§§ 9 и 11) и сделаны некоторые мелкие исправления.

Пятое издание печатается без изменений.

§ 1. О КРУГЛЫХ И НЕКРУГЛЫХ ЧИСЛАХ

«Из подъезда вышел человек лет около 49; пройдя по улице метров 196, он зашел в магазин, купил там две семерки яиц и пошел дальше...». Не правда ли, такое описание звучит несколько странно? Когда мы оцениваем какую-то величину — возраст человека, расстояние и т. п. — приблизительно, то мы всегда пользуемся круглыми числами и говорим обычно «метров 200», «человек лет 50» и т. п. С круглыми числами проще оперировать, чем с некруглыми, их легче запомнить, с ними удобнее производить арифметические действия. Например, ни для кого не составит труда умножить в уме 100 на 200, если же нужно перемножить два некруглых трехзначных числа, скажем 147 и 343, то далеко не всякий сделает это без карандаша и бумаги.

Говоря о круглых числах, мы обычно не отдаем себе отчета в том, что деление чисел на круглые и некруглые, по существу, условно и что одно и то же число может быть круглым или некруглым в зависимости от того, какой системой записи чисел или, как обычно говорят, какой системой счисления мы пользуемся. Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим прежде всего, что представляет собой наша обычная десятичная система счисления, которой мы все пользуемся. В этой системе каждое целое положительное число представляется в виде суммы единиц, десятков, сотен и т. д., т. е. в виде суммы различных степеней числа 10 с коэффициентами, которые могут принимать значения от 0 до 9 включительно. Например, запись

$$2548$$

означает, что рассматриваемое число содержит 8 единиц, 4 десятка, 5 сотен и 2 тысячи, т. е. 2548 — это сокращенное обозначение выражения

$$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0.$$

Однако можно было бы с таким же успехом представить каждое число в виде комбинации степеней не числа 10, а какого-либо другого целого числа (кроме 1), например числа 7. В этой системе, называемой «семеричной системой счисления» или «системой счисления с основанием 7», мы вели бы счет от 0 до 6 обычным образом, а число 7 приняли бы за единицу следующего разряда. Его естественно обозначить в нашей новой семеричной системе символом

$$10$$

(единица второго разряда). Чтобы не путать это обозначение с десятичным числом 10, припишем к нему значок $_7$, т. е. окончательно вместо 7 будем писать

$$(10)_7.$$

Единицами следующих разрядов должны служить числа 7^2, 7^3 и т. д. Их естественно обозначить

$$(100)_7,\ (1000)_7 \text{ и т. д.}$$

Любое целое число можно скомбинировать из степеней числа 7, т. е. представить в виде

$$a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 7 + a_0,$$

где каждый из коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_k$ может принимать любое целое значение от 0 до 6. Как и в случае десятичной системы, естественно опускать при записи чисел в системе с основанием 7 сами степени этого основания и писать это число в виде

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_7,$$

отметив опять-таки значком $_7$ тот факт, что в основу системы счисления, которой мы пользуемся, положено именно число 7.

Рассмотрим пример. Десятичное число 2548 можно представить в виде

$$1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 0,$$

т. е., в принятых нами обозначениях, в виде

$$(10\,300)_7.$$

Таким образом,

$$(2548)_{10}=(10\,300)_7.$$

Обратим внимание на то, что при пользовании этой новой «семеричной» системой записи круглыми будут совсем не те числа, которые были круглыми в десятичной системе. Например,

$$(147)_{10}=(300)_7,$$
$$(343)_{10}=(1000)_7$$

(так как $147=3\cdot 7^2$ и $343=7^3$); в то же время

$$(100)_{10}=(202)_7,$$
$$(500)_{10}=(1313)_7$$

и т. д. Поэтому в семеричной системе умножить в уме $(147)_{10}$ на $(343)_{10}$ проще, чем $(100)_{10}$ на $(200)_{10}$. Если бы мы пользовались семеричной системой, то, несомненно, возраст 49 лет (а не 50) воспринимался бы как «круглая дата» и отмечался бы как юбилей, мы говорили бы «метров 98» или «метров 196», прикидывая расстояние на глаз (поскольку $(98)_{10}=(200)_7$ и $(196)_{10}=(400)_7$ — круглые числа в семеричной системе), считали бы предметы семерками, а не десятками и т. д. Короче говоря, если бы семеричная система была общепринятой, то та фраза, с которой мы начали изложение, никого бы не удивила.

Однако на самом деле семеричная система не имеет сколько-нибудь широкого распространения и никак не может конкурировать с повсеместно распространенной десятичной системой. В чем же причина этого?

§ 2. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Почему именно числу 10 отведена такая привилегированная роль? Человек, далекий от этих вопросов, ответил бы, вероятно, не задумываясь, так: дело просто в том, что число 10 — круглое, на него удобно умножать любое число, поэтому удобно считать десятками, сотнями и т. д. Мы, однако, уже выяснили, что дело обстоит как раз наоборот: число 10 потому и круглое, что оно принято за основание системы счисления. При переходе к какой-либо иной системе счисления, скажем семеричной (где оно записывается в виде $(13)_7$), его «круглость» немедленно исчезнет.

Причины, по которым именно десятичная система оказалась общепринятой, совсем не математического характера. Десять пальцев рук — вот тот первоначальный аппарат для счета, которым человек пользовался, начиная с доисторических времен. По пальцам удобно считать от одного до десяти. Сосчитав до десяти, т. е. использовав до конца возможности нашего природного «счетного аппарата», естественно принять само число 10 за новую, более крупную единицу (единицу следующего разряда). Десять десятков составляют единицу третьего разряда и т. д. Таким образом, именно счет по пальцам рук положил начало той системе, которая кажется нам сейчас чем-то само собой разумеющимся.

§ 3. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И ИХ ПРОИСХОЖДЕНИЕ

Десятичная система счисления далеко не сразу заняла то господствующее положение, которое она имеет сейчас. В разные исторические периоды многие народы пользовались системами счисления, отличными от десятичной.

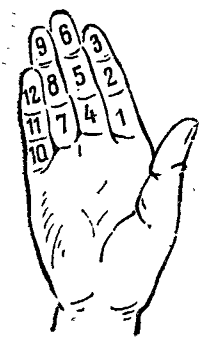

Рис. 1

Так, например, довольно широкое распространение имела двенадцатеричная система. Ее происхождение связано, несомненно, тоже со счетом на пальцах, а именно, так как четыре пальца руки (кроме большого) имеют в совокупности 12 фаланг (рис. 1), то по этим фалангам, перебирая их по очереди большим пальцем, и ведут счет от 1 до 12. Затем 12 принимается за единицу следующего разряда и т. д. В устной речи остатки двенадцатеричной системы сохранились и до наших дней: вместо того чтобы сказать «двенадцать», мы часто говорим «дюжина». Многие предметы (ножи, вилки, тарелки, носовые платки и т. п.) очень часто считают именно дюжинами, а не десятками. (Вспомните, например, что сервиз бывает, как правило, на 12 или на 6 человек и значительно реже на 10 или на 5.) Сейчас уже крайне редко встречается слово «гросс», означающее «дюжину дюжин» (т. е. единицу третьего разряда в двенадцатеричной системе), но еще несколько десятков лет тому назад оно было довольно широко распространено, особенно в торговом мире. Дюжина гроссов называлась «масса», однако сейчас такое значение слова «масса» мало кому известно*).

Несомненные остатки двенадцатеричной системы счисления имеются у англичан — в системе мер (например, 1 фут = 12 дюймам) и в денежной системе (1 шиллинг = 12 пенсам).

Заметим, что с математической точки зрения двенадцатеричная система имела бы, пожалуй, некоторые преимущества перед десятичной, поскольку число 12 делится на 2, 3, 4 и 6, а число 10 только на 2 и 5, а больший запас делителей у числа, служащего основанием системы счисления, создает известные удобства в ее использовании. К этому вопросу мы еще вернемся в § 7, в связи с признаками делимости.

В древнем Вавилоне, культура которого, в том числе и математическая, была довольно высока, существовала весьма сложная шестидесятеричная система. Мнения историков по поводу того, как именно возникла такая система, расходятся. Одна из гипотез, впрочем не особенно достоверная, состоит в том, что произошло смешение двух племен, одно из которых пользовалось шестеричной системой, а другое — десятичной. Шестидесятеричная система возникла как компромисс между этими двумя системами. Другая гипотеза состоит в том, что вавилоняне считали продолжительность года равной 360 суткам, что, естественно, связывалось с числом 60. Однако это предположение тоже нельзя считать достаточно обоснованным: астрономические познания древних вавилонян были довольно значительны, поэтому следует думать, что погрешность, с которой они определяли продолжительность года, была значительно меньше, чем 5 суток. Несмотря на то, что происхождение шестидесятеричной системы остается неясным, самый факт ее

*) Хотя, возможно, именно в нем лежит корень таких употребительных выражений, как «масса дел», «масса людей» и т. п. (ср. с выражениями «тысяча дел» и т. д.).

существования и широкого распространения в Вавилонском государстве достаточно хорошо установлен. Эта система, как и двенадцатеричная, в какой-то степени сохранилась и до наших дней (например, в делении часа на 60 минут, а минуты — на 60 секунд и в аналогичной системе измерения углов: градус = 60 минутам, 1 минута = 60 секундам). В целом, однако, эта система, требующая шестидесяти различных «цифр», довольно громоздка и менее удобна, чем десятичная.

По свидетельству известного исследователя Африки Стенли, у ряда африканских племен была распространена пятеричная система счисления. Связь этой системы со строением человеческой руки — первоначальной «счетной машины» — достаточно очевидна.

У ацтеков и майя — народов, населявших в течение многих столетий обширные области американского континента и создавших там высокую культуру, почти полностью уничтоженную испанскими завоевателями в 16—17 вв., — была принята двадцатеричная система. Та же двадцатеричная система была принята и у кельтов, населявших Западную Европу, начиная со второго тысячелетия до нашей эры. Некоторые следы двадцатеричной системы кельтов сохранились в современном французском языке: например, «восемьдесят» по-французски будет quatre-vingts, т. е. буквально «четырежды двадцать». Число 20 встречается и во французской денежной системе: основная денежная единица — франк — делится на 20 су.

Из четырех перечисленных выше систем счисления (двенадцатеричной, пятеричной, шестидесятеричной и двадцатеричной), сыгравших наряду с десятичной заметную роль в развитии человеческой культуры, все, кроме шестидесятеричной, источники которой неясны, связаны с тем или иным способом счета по пальцам рук (или и рук, и ног), т. е. имеют, подобно десятичной системе, несомненное «анатомическое» происхождение.

Как показывают приведенные выше примеры (их число можно было бы значительно увеличить), многочисленные следы этих систем счисления сохранились до наших дней и в языках многих народов, и в принятых денежных системах, и в системах мер. Однако для записи чисел и для выполнения тех или иных вычислений мы всегда пользуемся десятичной системой.

§ 4. ПОЗИЦИОННЫЕ И НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Все те системы счисления, о которых мы говорили выше, строятся по одному общему принципу. Выбирается некоторое число p — основание системы счисления, и каждое число N представляется в виде комбинации его степеней с коэффициентами, принимающими значения от 0 до $p-1$, т. е. в виде

$$a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0.$$

Далее такое число сокращенно записывается в виде

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_p.$$

В этой записи значение каждой цифры зависит от того места, которое эта цифра занимает. Например, в числе 222 двойка участвует три раза. Но самая правая из них означает две единицы, вторая справа — два десятка, т. е. двадцать, а третья — две сотни. (Здесь мы имеем в виду десятичную систему. Если бы мы пользовались какой-либо другой системой счисления, скажем с основанием p, то эти три двойки означали бы соответственно величины 2, $2p$ и $2p^2$.) Системы счисления, построенные таким образом, называются **позиционными**.

Существуют и другие — **непозиционные** системы счисления, построенные на иных принципах. Общеизвестный пример такой системы — так называемые римские цифры. В этой системе имеется некоторый набор основных символов, а именно единица I, пять V, десять X, пятьдесят L, сто C и т. д., и каждое число представляется как комбинация этих символов. Например, число 88 в этой системе запишется так:

LXXXVIII.

В этой системе смысл каждого символа не зависит от того места, на котором он стоит. Так, в приведенной выше записи числа 88 цифра X, участвуя три раза, каждый раз означает одну и ту же величину — десять единиц.

Римские цифры мы часто встречаем и сейчас, например на циферблатах часов, однако в математической практике они не применяются. Позиционные системы удобны тем, что они позволяют записывать большие числа с помощью сравнительно небольшого числа знаков. Еще более важное преимущество позиционных систем — это простота и легкость выполнения арифметических операций над числами, записанными в этих системах. (Попробуйте для сравнения, например, перемножить два трехзначных числа, записав их римскими цифрами.)

Дальше мы будем говорить только о позиционных системах счисления.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Для чисел, записанных в десятичной системе, мы пользуемся правилами сложения и умножения чисел «столбиком», деления — «углом». Эти же правила полностью применимы и для чисел, записанных в любой другой позиционной системе.

Рассмотрим сложение. Как в десятичной, так и в любой другой системе мы складываем сначала единицы, затем переходим к следующему разряду и т. д. до тех пор, пока не дойдем до самого старшего из имеющихся разрядов. При этом необходимо помнить, что всякий раз, когда при сложении в предыдущем разряде получается сумма, бо́льшая чем основание той системы счисления, в которой ведется запись, или равная ему, надо сделать перенос в следующий разряд. Например,

$$1)\quad \begin{array}{r} (23\,651)_8 \\ +\,(17\,043)_8 \\ \hline (42\,714)_8 \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{r} (423)_6 \\ +\,(1341)_6 \\ (521)_6 \\ \hline (3125)_6 \end{array}$$

Перейдем теперь к умножению. Для определенности выберем какую-нибудь конкретную систему, скажем шестеричную. Основой для перемножения любых чисел служит таблица умножения, определяющая произведения чисел, меньших, чем основание системы счисления. Нетрудно убедиться в том, что для шестеричной системы таблица умножения выглядит так:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Здесь в каждой клетке стоит произведение чисел, представляющих собой номера строки и столбца, на пересечении которых стоит эта клетка, причем все числа записаны здесь в шестеричной системе (указывающий на это значок мы здесь опустили, чтобы не загромождать таблицу).

Пользуясь этой таблицей, легко перемножить «столбиком» числа, содержащие любое количество разрядов. Например,

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}(352)_6\\(245)_6\end{array}\\ \hline (3124)_6\\ (2332)_6\\ (1144)_6\\ \hline (145244)_6 \end{array}$$

Деление «углом» также можно выполнять в любой системе счисления. Рассмотрим, например, такую задачу:

Разделить $(120\,101)_3$ на $(102)_3$.

Вот ее решение:

$$
\begin{array}{l|l}
(120101)_3 & (102)_3 \\
\cline{2-2}
\underline{(102)_3} & (1101)_3 \\
\quad (111)_3 & \\
\quad \underline{(102)_3} & \\
\qquad (201)_3 & \\
\qquad \underline{(102)_3} & \\
\qquad\ \ (22)_3 &
\end{array}
$$

(Запишите делимое, делитель, частное и остаток в десятичной системе и проверьте правильность результата.)

Задача 1. На доске сохранилась полустертая запись

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & - & 5 & - \\ 1 & - & 6 & 4 & 2 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}
\end{array}
$$

Выяснить, в какой системе счисления написаны слагаемые и сумма?

Ответ. В семеричной.

Задача 2. Один школьный учитель на наш вопрос, много ли у него в классе учеников, ответил: «У меня в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки». Сначала его ответ нас удивил, но потом мы поняли, что просто учитель пользовался не десятичной системой. Какую систему имел в виду учитель?

Решение этой задачи не сложно. Пусть x — основание той системы счисления, о которой идет речь. Тогда слова учителя означают следующее: у него x^2 учеников, из них $2x+4$ мальчика и $3x+2$ девочки. Таким образом,

$$2x+4+3x+2=x^2,$$

или

$$x^2-5x-6=0,$$

откуда

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm7}{2},$$

т. е.

$$x_1=6, \quad x_2=-1.$$

Так как -1 не может быть основанием системы счисления, то $x=6$. Итак, ответ учителя был дан в шестеричной системе; при этом у него было тридцать шесть учеников, из них шестнадцать мальчиков и двадцать девочек.

§ 6. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

Как перевести число, записанное в одной системе, например десятичной, в какую-либо другую систему, скажем семеричную? Мы уже знаем, что записать какое-либо число A в семеричной системе — это значит представить его в виде суммы

$$A = a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 7 + a_0.$$

Следовательно, чтобы найти семеричное представление числа A, надо найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$, каждый из которых может быть какой-либо цифрой от 0 до 6 включительно. Разделим наше число A на 7 (в целых числах). Остаток при этом будет равен, очевидно, a_0, так как в написанном представлении числа A все слагаемые, кроме последнего, делятся на 7 нацело. Далее, возьмем частное, получившееся при делении числа A на 7, и снова разделим его на 7. Получившийся при этом новый остаток будет равен a_1. Продолжая этот процесс дальше, мы найдем все цифры $a_0, a_1, \ldots, a_k$, входящие в семеричное представление числа A, в виде последовательных остатков, получающихся при описанном выше повторном делении его на 7. Рассмотрим, например, число

$$(3287)_{10}.$$

Разделив его на 7, получим частное 469 и остаток 4. Следовательно, в семеричной записи числа 3287 последняя цифра равна 4. Для нахождения второй цифры разделим найденное нами частное 469 снова на 7. Получим частное 67, а остаток при этом равен нулю. Следовательно, вторая цифра в семеричной записи числа 3287 есть нуль. Далее, разделив 67 на 7, получим 9 и 4 в остатке. Этот остаток 4 представляет собой третью цифру в семеричной записи числа 3287. Наконец, разделив последнее частное 9 на 7, получим остаток 2 и частное 1. Этот остаток 2 дает нам четвертую цифру в искомой записи, а частное единица (которую мы уже делить на 7 не можем) представляет собой пятую (и последнюю) цифру. Таким образом,

$$(3287)_{10} = (12404)_7.$$

Правая часть этого равенства представляет собой сокращенную запись выражения

$$1 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 4,$$

подобно тому как $(3287)_{10}$— это сокращенная запись выражения

$$3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7.$$

Выкладки, которые мы проделали для перехода от десятичной записи числа 3287 к его представлению в семеричной системе, удобно расположить так:

$$\begin{array}{llllll}
3287 & \underline{|\,7} & & & & \\
\mathbf{4} & 469 & \underline{|\,7} & & & \\
 & \mathbf{0} & 67 & \underline{|\,7} & & \\
 & & \mathbf{4} & 9 & \underline{|\,7} & \\
 & & & \mathbf{2} & \mathbf{1} &
\end{array}$$

Ясно, что все сказанное выше применимо не только к семеричной, но и к любой другой системе. Общее правило для получения записи некоторого числа A в системе счисления с основанием p можно сформулировать так: разделим число A на p в целых числах; полученный при этом остаток даст цифру, стоящую в первом разряде p-ичной записи числа A. Разделив полученное при этом первом делении частное снова на p, возьмем второй остаток; это будет цифра, стоящая во втором разряде, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока мы не получим частное, меньшее основания системы счисления. Это частное представляет собой цифру, стоящую в старшем разряде.

Рассмотрим еще один пример. Записать число 100 в двоичной системе. Получаем

$$\begin{array}{llllllll}
100 & \underline{|\,2} & & & & & & \\
\mathbf{0} & 50 & \underline{|\,2} & & & & & \\
 & \mathbf{0} & 25 & \underline{|\,2} & & & & \\
 & & \mathbf{1} & 12 & \underline{|\,2} & & & \\
 & & & \mathbf{0} & 6 & \underline{|\,2} & & \\
 & & & & \mathbf{0} & 3 & \underline{|\,2} & \\
 & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{1} &
\end{array}$$

т. е.

$$(100)_{10} = (1100100)_2.$$

С переводом чисел из десятичной системы единиц в двоичную приходится постоянно сталкиваться при работе на вычислительных машинах, о которых мы поговорим несколько позже.

В тех примерах, которые мы рассмотрели, исходной системой счисления была десятичная. Можно такими же приемами осуществлять перевод числа из произвольной системы в любую другую. Для этого нужно выполнить такую же серию последовательных делений, как и в рассмотренных выше примерах, но только эти действия придется выполнять не в десятичной системе, а в той системе, в которой сделана первоначальная запись числа.

Задача. Предположим, что у нас есть весы (с двумя чашами) и гири в 1 грамм, 3 грамма, 9 граммов, 27 граммов и т. д. (по одной штуке каждого веса). Можно ли с помощью такого набора гирь взвесить любой груз с точностью до одного грамма?

Ответ здесь положительный. Приведем решение этой задачи, опирающееся на запись чисел в троичной системе. Пусть предмет, который нам нужно взвесить, весит A граммов (число A мы считаем целым). Это число A можно записать в троичной системе

$$A = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_3,$$

т. е.

$$A = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ могут принимать значения 0, 1 или 2.

Можно, однако, записать каждое число в троичной системе и несколько иначе, а именно так, чтобы в его записи участвовали цифры 0, 1 и -1 (вместо 0, 1 и 2). Для получения такой записи поступим следующим образом. Переведем числа A из десятичной системы в троичную, пользуясь той схемой последовательных делений, которая была описана выше, но только каждый раз, когда у нас при делении на три будет получаться 2, мы будем частное увеличивать на единицу, а в остатке при этом писать -1.

В результате мы получим запись числа A в виде суммы

$$A = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 3 + b_0,$$

где каждый из коэффициентов $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ может быть равен 0, 1 или -1. Например, число 100, которое обычным образом записывается в троичной системе как 10201, во втором варианте будет иметь вид 11—101, поскольку $100 = 3^4 + 3^3 - 3^2 + 1$.

Теперь груз в A граммов положим на первую чашу весов, а гирю в 1 грамм поставим на вторую чашу, если $b_0 = 1$, и на первую чашу, если $b_0 = -1$ (если $b_0 = 0$, то первую гирю мы не используем); далее, гиря весом в 3 грамма ставится на вторую чашу, если $b_1 = 1$, и на первую, если $b_1 = -1$, и т. д. Легко понять, что, расставив гири по такому принципу, мы уравновесим груз A. Итак, с помощью гирь весом 1, 3, 9 и т. д. граммов можно уравновесить на всех любой груз. Если величина груза не была известна, то мы подбираем такое расположение гирь на чашах весов, которое уравновешивает этот груз, а тем самым определяем и величину груза.

Поясним сказанное на примере. Предположим, что у нас имеется груз в 200 граммов. Переводя 200 в троичную запись обычным образом, мы получили бы

$$\begin{array}{rrrrrr}
200 & \underline{|\,3} & & & & \\
2 & 66 & \underline{|\,3} & & & \\
 & 0 & 22 & \underline{|\,3} & & \\
 & & 1 & 7 & \underline{|\,3} & \\
 & & & 1 & 2 &
\end{array}$$

Следовательно, $(200)_{10} = (21102)_3$, или подробнее

$$200 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2.$$

Если же 200 переводить в троичную запись вторым из описанных выше способов, т. е. используя -1, но не используя 2, то получим

$$\begin{array}{rrrrrrr}
200 & \underline{|\,3} & & & & & \\
-1 & 67 & \underline{|\,3} & & & & \\
 & 1 & 22 & \underline{|\,3} & & & \\
 & & 1 & 7 & \underline{|\,3} & & \\
 & & & 1 & 2 & \underline{|\,3} & \\
 & & & & -1 & 1 &
\end{array}$$

т. е.

$$200 = 1 \cdot 3^5 - 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 - 1$$

(справедливость последнего равенства легко проверить непосредственным подсчетом).

Таким образом, чтобы уравновесить груз в 200 граммов, положенный на чашу весов, нужно на ту же чашу положить гири в 1 грамм и 81 грамм, а на противоположную — гири в 3, 9, 27 и 243 грамма.

§ 7. О ПРИЗНАКАХ ДЕЛИМОСТИ

Существуют простые признаки, позволяющие определить, что то или иное число делится, например, на 3, на 5, на 9 и т. п. Напомним эти признаки.

1. *Признак делимости на 3*: число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Например, число

$$257802 \text{ (сумма цифр } 2+5+7+8+0+2=24)$$

делится на три, а число

$$125831 \text{ (сумма цифр } 1+2+5+8+3+1=20)$$

на три не делится.

2. *Признак делимости на 5*: число делится на 5, если его последняя цифра есть 5 или 0 (т. е. если на 5 делится число единиц его последнего разряда).

3. *Признак делимости на 2* аналогичен предыдущему: число делится на 2, если на 2 делится число единиц его последнего разряда.

4. *Признак делимости на 9* аналогичен признаку делимости на 3: число делится на 9, если сумма составляющих его цифр делится на 9.

Доказательство справедливости этих признаков не представляет труда. Рассмотрим, например, признак делимости на 3. Он основан на том, что единица каждого из разрядов десятичной системы (т. е. числа 1, 10, 100, 1000 и т. д.) при делении на 3 дает остаток 1. Поэтому всякое число

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10},$$

т. е. число

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

можно записать в виде

$$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) + B,$$

где B делится на 3 без остатка. Отсюда видно, что число

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на 3 в том и только в том случае, если на 3 делится число $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

Признак делимости на 5 вытекает из того, что число 10 — основание системы счисления — делится на 5, поэтому все разряды, кроме разряда единиц, при делении на 5 обязательно дают в остатке нуль. На том же самом основан и признак делимости на 2: число четное, если оно кончается четной цифрой.

Признак делимости на 9, как и признак делимости на 3, вытекает из того, что каждое число вида 10^k при делении на 9 дает в остатке 1.

Из сказанного ясно, что все эти признаки связаны с представлением чисел именно в десятичной системе и что они, вообще говоря, неприменимы, если пользоваться системой счисления с каким-либо другим основанием, отличным от 10. Например, число 86 в восьмеричной системе записывается в виде

$$(126)_8$$

(так как $86 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$). Сумма цифр равна 9, но 86 не делится ни на 9, ни на 3.

Однако для каждой позиционной системы счисления можно сформулировать свои признаки делимости на то или иное число.

Рассмотрим несколько примеров.

Будем писать числа в двенадцатеричной системе и сформулируем для такой записи признак делимости на 6. Так как число 12 — основание системы счисления — делится на 6, то число, записанное в двенадцатеричной системе, делится на 6 в том и только в том случае, если на 6 делится его последняя цифра (здесь то же самое положение, что и с делимостью на 5 или на 2 в десятичной системе).

Так как числа 2, 3 и 4 тоже служат делителями числа 12, то справедливы следующие признаки делимости: число, записанное в двенадцатеричной системе, делится на 2 (соответственно на 3 и на 4), если его последняя цифра делится на 2 (соответственно на 3 и на 4).

Предоставим читателю доказать следующие утверждения, относящиеся к признакам делимости в двенадцатеричной системе:

а) число $A=(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{12}$ делится на 8, если на 8 делится число $(a_1 a_0)_{12}$, образованное его двумя последними цифрами;

б) число $A=(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{12}$ делится на 9, если на 9 делится число $(a_1 a_0)_{12}$, образованное его двумя последними цифрами;

в) число $A=(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{12}$ делится на 11, если на 11 делится сумма его цифр, т. е. число $a_n+a_{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_1+a_0$.

Рассмотрим еще две задачи, связанные с делимостью чисел.

1. Число

$$A=(3630)_p$$

(записанное в системе с основанием p) делится на 7. Чему равно p и какова десятичная запись этого числа, если известно, что $p \leqslant 12$? Будет ли решение задачи единственным, если условие $p \leqslant 12$ не выполнено?

Ответ. $p=7$, $A=(1344)_{10}$; если же величина p не ограничена, то решений бесконечно много, именно: за p можно принять любое число вида $7k$ или $7k-1$, где $k=1, 2, \ldots$

2. Доказано, что число

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_p,$$

т. е. число

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0,$$

делится на $p-1$ в том и только в том случае, если на $p-1$ делится сумма

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

(Сравните с признаком делимости на 9 в десятичной системе и с признаком делимости на 11 в двенадцатеричной системе.)

§ 8. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА

Наименьшее из чисел, которое можно взять за основание системы счисления,— это число 2. Соответствующая этому основанию система, называемая двоичной,— одна из очень старых. Она встречалась, правда в весьма несовершенной форме, у некоторых племен Австралии и Полинезии. Удобство этой системы — в ее необычайной простоте. В двоичной системе участвуют только две цифры 0 и 1, а число 2 представляет собой уже единицу следующего разряда. Весьма просто выглядят и правила действия над числами, записанными в двоичной системе. Основные правила сложения даются равенствами

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+1=(10)_2,$$

а таблица умножения для двоичной системы имеет вид

	0	1
0	0	0
1	0	1

Некоторый недостаток двоичной системы состоит в том, что, поскольку основание системы мало, для записи даже не очень больших чисел приходится использовать много знаков. Например, число 1000 записывается в двоичной системе в виде

$$1111101000,$$

т. е. с помощью десяти цифр. Однако этот ее недостаток часто окупается рядом преимуществ, которые и служат причиной того, что двоичная система получила широкое распространение в различных областях техники, в особенности в современных вычислительных машинах.

О технических применениях двоичной системы мы расскажем ниже, а сейчас рассмотрим две задачи, связанные с двоичной записью чисел.

Задача 1. Я загадал какое-то целое число от 1 до 1000. Беретесь ли вы узнать его, задав мне не более 10 вопросов, на каждый из которых я буду отвечать только «да» или «нет»? Беритесь, задача эта вполне разрешима.

Одна из возможных серий вопросов, заведомо приводящая к успеху такова:

1-й вопрос: Разделите задуманное число на 2. Разделится ли оно без остатка? Если ответ «да», то запишем цифру нуль, если «нет», то запишем единицу (иначе говоря, мы запишем остаток от деления задуманного числа на 2).

2-й вопрос: Разделите на 2 то частное, которое получилось при первом делении. Делится ли оно без остатка? Снова при ответе «да» запишем нуль, а при ответе «нет» — единицу.

Каждый следующий вопрос будем составлять по тому же самому образцу, т. е. так: «Разделите на 2 то частное, которое получилось при предыдущем делении. Делится ли оно без остатка?» Всякий раз мы пишем нуль при положительном ответе и единицу при отрицательном.

Повторив эту процедуру 10 раз, мы получим 10 цифр, каждая из которых есть нуль или единица. Нетрудно убедиться в том, что эти цифры образуют запись искомого числа в двоичной системе. Действительно, система наших вопросов воспроизводит ту самую процедуру, с помощью которой делается перевод некоторого числа в двоичную систему. При этом десяти вопросов достаточно потому, что каждое число от 1 до 1000 записывается в двоичной системе с помощью не более чем десяти знаков. Если считать, что задуманное число уже заранее переведено в двоичную систему, то система вопросов, с помощью которой его можно узнать, становится совершенно очевидной: нужно о каждой его цифре спросить, равна она нулю или нет.

Рассмотрим другую задачу, по существу, близкую к предыдущей.

Задача 2. У меня имеется 7 табличек, каждая из которых содержит, подобно шахматной доске, 64 клетки (рис. 2). В эти клетки вписаны различные числа от 1 до 127. Задумайте какое-либо из этих чисел и скажите, в каких таблицах (они имеют номера от 1 до 7) это число встречается. Я назову это число. Каким образом?

Вот разгадка этого несложного фокуса.

Запишем каждое из чисел от 1 до 127 в двоичной системе. Каждое из этих чисел содержит в двоичной записи не более семи цифр (в частности, $127=(1111111)_2$). Впишем данное число A в таблицу с номером k ($k=1, 2, \ldots, 7$), если в его двоичной записи на k-м месте стоит единица, и не будем его туда вписывать, если в его двоичной записи на k-м месте стоит нуль. Например, число

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

1

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

3

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

6

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

7

Рис. 2

57, которое в двоичной системе записывается как

0111001,

должно быть занесено в первую, четвертую, пятую и шестую таблички, число 1 — только в первую, число 127 — во все семь табличек и т. д. Таким образом, говоря, в каких табличках содержится данное число, вы тем самым сообщаете его двоичную запись. Мне остается лишь перевести ее в десятичную.

Можно поставить вопрос наоборот: укажите произвольное число от 1 до 127, и я скажу, в каких табличках на рис. 2 оно есть, а в каких его нет. Для ответа на такой вопрос достаточно перевести названное число в двоичную систему (при некотором навыке это нетрудно сделать и в уме) и назвать номера тех разрядов, в которых получится единица *).

§ 9. ИГРА «НИМ» (ИГРА В ТРИ КУЧКИ СПИЧЕК)

Еще в древнем Китае была известна следующая игра, называвшаяся игрой «ним». Имеются три кучки камней. Двое играющих поочередно берут камни из этих кучек, причем при каждом ходе играющий может взять любое, отличное от нуля, число камней из любой (но только из одной) кучки. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.

В современных условиях вместо камней пользуются более доступными предметами, например спичками, и называют такую игру «игрой в спички». Ясно, конечно, что суть дела от замены камней спичками (или любыми другими предметами) не меняется. Задача состоит в том, чтобы выяснить, каков должен быть исход такой игры при оптимальной тактике обоих игроков и в чем эта оптимальная тактика должна состоять.

Для решения этой задачи удобно воспользоваться двоичной системой. Пусть в трех кучках лежат,

---

*) В каждой из приведенных выше табличек числа выписаны в порядке возрастания, поэтому структура этих табличек довольно легко обнаруживается. Однако внутри каждой из этих семи табличек числа можно было бы переставить совершенно произвольно, замаскировав, таким образом, способ построения этих табличек.

соответственно, a, b и c спичек. Запишем числа a, b и c в двоичной системе:

$$a=a_m\cdot 2^m+a_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\ldots+a_1\cdot 2+a_0,$$
$$b=b_m\cdot 2^m+b_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\ldots+b_1\cdot 2+b_0,$$
$$c=c_m\cdot 2^m+c_{m-1}\cdot 2^{m-1}+\ldots+c_1\cdot 2+c_0.$$

Мы можем при этом считать, что в каждой записи имеется одно и то же число разрядов, дописав, если нужно, впереди соответствующее число нулей у тех чисел, в которых было меньше знаков, чем в других. Таким образом, каждая из цифр a_0, b_0, c_0, $\ldots$, a_m, b_m, c_m может быть равна 0 или 1, причем из цифр a_m, b_m и c_m хотя бы одна (но не обязательно все) отлична от нуля. Игрок, делающий первый ход, может заменить одно из чисел a, b или c любым меньшим числом. Предположим, что он решил взять спички из первой кучки, т. е. изменить число a. Это означает, что будут изменены какие-то из цифр $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Аналогично, взяв спички из второй кучки, игрок изменит хоть одну из цифр $b_0, \ldots, b_m$, а взяв спички из третьей кучки, он изменит хоть одну из цифр $c_0, \ldots, c_m$.

Рассмотрим теперь суммы

$$a_m+b_m+c_m,\ a_{m-1}+b_{m-1}+c_{m-1},\ \ldots,\ a_0+b_0+c_0. \qquad (*)$$

Каждая из этих сумм может быть равна 0, 1, 2 или 3. Если хоть одна из этих сумм нечетна (т. е. равна 1 или 3), то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш. Действительно, пусть $a_k+b_k+c_k$ — первая (считая слева направо) из сумм (*), являющаяся нечетной. Тогда хотя бы одна из трех цифр a_k, b_k и c_k равна 1. Пусть, например, $a_k=1$. При этом условии играющий может взять из первой кучки такое количество спичек, чтобы коэффициенты $a_m, \ldots, a_{k+1}$ не изменились, величина a_k стала равной нулю, а каждый из коэффициентов $a_{k-1}, \ldots, a_0$ принял бы то значение (0 или 1), которое желательно для играющего, делающего ход. Таким образом, из первой кучки можно взять такое количество спичек, чтобы и все суммы

$$a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1},\ \ldots,\ a_0+b_0+c_0$$

стали четными. Иначе говоря, начавший игру может сделать так, чтобы после его хода все суммы (*) стали четными. Второй игрок, сделав любой ход, неизбежно изменит четность хотя бы одной из этих сумм. Значит, после его хода снова наступит то положение, при котором хотя бы одна из сумм (*) нечетна. После этого первый игрок снова может добиться того, чтобы все суммы (*) стали четными. Итак, после каждого хода первого игрока все суммы (*) — четные, а после каждого хода второго игрока хотя бы одна из этих сумм — нечетная. Так как общее количество спичек после каждого хода уменьшается, то рано или поздно наступит положение, когда все суммы (*) равны нулю, т. е. спичек не останется. Так как при этом все суммы (*) — четные, то положение, когда все суммы (*) — нули, наступит после какого-то хода первого игрока, т. е. он выиграет. Если в начальном положении все суммы (*) — четные, то после любого первого хода игрока, начинающего игру, хотя бы одна из сумм (*) станет нечетной и тогда второй игрок сможет применить ту тактику, которая была описана выше для первого игрока, и тем самым выиграть партию.

Итак, результат игр полностью предопределен заданием чисел a, b и c. Если они таковы, что хотя бы одна из сумм (*) нечетна, то первый игрок может обеспечить себе выигрыш. Если же все эти суммы четны, то выигрывает, при правильной тактике, второй игрок.

Нетрудно сообразить, что тройки чисел, благоприятствующие второму игроку, встречаются достаточно редко, так что при правильной игре и случайном выборе чисел a, b и c выигрывать будет, как правило, первый игрок. Например, если у нас имеется 10 спичек ($a+b+c=10$), то существует 9 способов распределить их на три кучки. Из них 8 обеспечивают выигрыш первому игроку и только один — второму.

§ 10. ДВОИЧНЫЙ КОД В ТЕЛЕГРАФИИ

Одно из сравнительно старых технических применений двоичной системы — это телеграфный код. Выпишем буквы (без «ё» и «й», но включая «—», т. е. пробел между словами), употребляющиеся в русском языке, по алфавиту и перенумеруем их подряд. Получим

–	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Ъ	Э	Ю	Я
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Запишем номер каждой из букв в двоичной системе. Так как $2^5 = 32$, то каждый из этих номеров представляется в ней не более чем пятью знаками. Будем писать каждый из этих номеров с помощью именно пяти знаков, добавляя, если нужно, соответствующее число нулей впереди первой значащей цифры. Получаем

$$\begin{array}{ccccccc}
— & \sim & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{А} & \sim & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\text{Б} & \sim & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\text{Я} & \sim & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Предположим, далее, что у нас имеется пять проводов, соединяющих какие-то два пункта. Тогда каждое из пятизначных чисел, обозначающих буквы алфавита, можно передать по такой линии определенной комбинацией электрических импульсов: скажем, пусть нулю отвечает отсутствие, а единице — наличие импульса в соответствующем проводе. На месте приема эта комбинация импульсов может привести в действие соответствующее печатающее устройство телеграфного аппарата, в результате чего на ленте отпечатается буква, соответствующая данной комбинации импульсов (т. е. данному двоичному числу).

Телеграфный аппарат представляет собой в принципе комбинацию двух устройств: передающей части, которая служит для перевода буквы в соответствующую систему импульсов, посылаемых по линии связи, и приемного устройства, которое по заданной комбинации импульсов печатает на телеграфной ленте (или бланке) соответствующую букву *).

*) Мы говорили о пяти проводах, связывающих два пункта. На самом деле обходятся одним проводом, по которому импульсы, образующие ту комбинацию, которая отвечает данной букве, передаются последовательно друг за другом.

Применение в телеграфии именно двоичной системы связано, очевидно, с удобством превращения двоичного числа в систему электрических сигналов *).

§ 11. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА — ХРАНИТЕЛЬНИЦА ТАЙН

Телеграф или радиотелеграф — хорошее средство для того, чтобы быстро передать сообщение тому или иному адресату. Но при этом такое сообщение легко может быть перехвачено другими лицами, а часто, особенно в военных условиях, необходимо сделать те или иные сообщения недоступными для всех, кроме того адресата, которому оно предназначено. С этой целью прибегают к различным способам шифрования текста.

Вероятно, многие из читателей сами развлекались когда-либо придумыванием тех или иных способов шифровки и вели «таинственную переписку». Простейший из таких способов — обозначить каждую букву алфавита каким-нибудь символом: другой буквой, числом, условным значком и т. п. Такие системы часто упоминаются в детективной и приключенческой литературе; вспомним хотя бы «Пляшущие человечки» Конан-Дойля или «Путешествие к центру земли» Жюля Верна. Разгадать любую такую систему нетрудно. Дело в том, что каждый язык, в том числе и русский, обладает определенной структурой: одни буквы и сочетания букв в нем встречаются чаще, другие — реже, а иные (скажем, мягкий знак после гласной) вообще не встречаются. Эта структура, сохраняющаяся и после замены букв любыми символами, позволяет без труда раскрыть такую систему шифрования. Существуют и гораздо более сложные системы, но и они нередко уступают усилиям опытных дешифровщиков.

Естественно поставить такой вопрос: «А существует ли система шифровки, безусловно гарантирующая сохранение тайны, или же достаточно искусный дешифровщик

*) Наряду с описанной выше системой обозначения (кодирования) букв пятерками иулей и единиц в телеграфии широко применяется и другая система кодирования, так называемая азбука Морзе. В принципе азбука Морзе тоже дает представление каждой буквы в виде комбинаций двух различных элементов (точек и тире); обсуждать детали этой системы мы здесь не будем.

может, в принципе, прочесть любое шифрованное сообщение?»

Оказывается, нетрудно придумать систему, по существу, совсем простую, которая заведомо делает невозможным прочтение зашифрованного текста лицом, не имеющим ключа. Для описания такой системы воспользуемся двоичной системой и тем представлением букв в виде пятизначных двоичных чисел, о котором уже говорилось в предыдущем параграфе.

С помощью телеграфного кода всякий текст представляется как определенная последовательность пятизначных комбинаций нулей и единиц. Предположим, что мы заранее изготовили какую-то последовательность таких же пятерок, нулей и единиц, но уже совершенно произвольную. Такая последовательность, предназначенная для шифровки текста, называется *гаммой*. Гамму мы изготовили в двух экземплярах, записав ее, например, в виде комбинаций дырочек на специальной бумажной

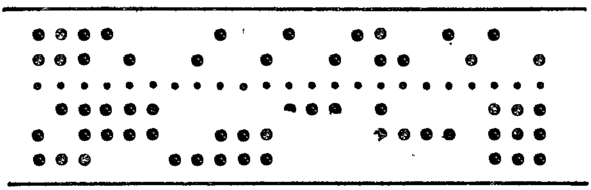

Рис. 3

ленте (рис. 3), где каждый поперечный ряд — одна пятизначная комбинация, причем пробитое отверстие означает единицу, а отсутствие отверстия — нуль (ряд из мелких дырочек — вспомогательный, к гамме не относится). Один экземпляр гаммы оставим себе, а другой перешлем адресату, с которым ведется телеграфная связь. Возьмем теперь текст, который мы хотим передать, и сложим его «поразрядно» с заготовленной нами гаммой. Это означает следующее. Первое пятизначное число (т. е. первую букву) текста сложим с первым числом гаммы, второе число из текста — со вторым числом гаммы и т. д., но сложим не по обычному правилу, когда сумма двух единиц дает единицу следующего разряда, а по правилу

$$0+0=0, \quad 1+0=0+1=1, \quad 1+1=0,$$

т. е. без переноса суммы двух единиц в старший разряд. Ясно, что, складывая таким образом два двоичных числа, т. е. две какие-то последовательности нулей и единиц, мы получим нуль, если эти числа одинаковы, и получим результат, отличный от нуля, если складываются разные числа. Полученную в результате такого «поразрядного» сложения сумму текста и гаммы можно передать в виде системы электрических сигналов по телеграфному проводу нашему адресату. Однако если эту последовательность прямо ввести в телеграфный аппарат, то он будет печатать бессмысленный набор букв. Для восстановления первоначального текста нужно к зашифрованному тексту еще раз прибавить ту же самую гамму (тем же методом поразрядного сложения).

Весь процесс может быть описан следующей схемой:

1) текст + гамма = шифрованный текст;

2) шифрованный текст + гамма = текст + гамма + + гамма = текст.

Нетрудно понять, что человек, имеющий в руках зашифрованный таким образом текст, но не имеющий соответствующей гаммы, принципиально не может узнать его содержание, точно так же как ничего нельзя сказать о величине X, если известна лишь величина суммы $X+Y$ и сказано, что Y — какое-то совершенно произвольное неизвестное нам число.

Весь описанный процесс легко осуществить автоматически, поставив на выходе передающего телеграфного аппарата устройство, выполняющее поразрядное сложение передаваемого текста и гаммы, и поставив другое такое же устройство перед входом в принимающий аппарат. Телеграфисты, обслуживающие линию, при этом даже не будут ощущать наличие в линии таких устройств.

Конечно, описанная система шифрования довольно громоздка, поскольку для ее осуществления нужно все время доставлять на оба конца линии запасы гаммы, причем каждый кусок такой гаммы используется только один раз (иначе возможна расшифровка).

Применение двоичной системы счисления здесь удобно потому, что именно в этой системе всякое число, поразрядно сложенное с самим собой, дает нулевой результат.

§ 12. НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Выше мы говорили о применении двоичной системы в телеграфии, т. е. в сравнительно старой области техники (первые телеграфные аппараты, основанные на передаче электрических сигналов по проводам, появились в 30-х годах прошлого века). Сейчас мы рассмотрим одно из новейших применений двоичной системы — использование этой системы в вычислительных машинах. Предварительно нам придется сказать, хотя бы в самых общих чертах, о том, что представляют собой так называемые электронные вычислительные машины.

История развития вычислительной техники очень длительна и в то же время очень коротка. Первые приспособления, облегчающие и ускоряющие вычислительную работу, появились давно. Так, например, обычные конторские счеты были известны более четырех тысяч лет тому назад. Вместе с тем подлинная «машинная математика» возникла лишь в конце 40-х годов, когда появились первые быстродействующие вычислительные машины, основанные на применении радиоэлектронной техники (радиоламп, а затем и полупроводниковых элементов). За короткий срок эта область техники достигла поразительных успехов. Современные вычислительные машины работают со скоростями, достигающими сотен тысяч и даже миллионов операций в секунду, другими словами, в каждую секунду такая машина выполняет столько операций, сколько опытный вычислитель, вооруженный, например, арифмометром, может выполнить за несколько месяцев работы. Появление таких машин позволило успешно решать задачи столь сложные и громоздкие, что при ручном способе счета их было бы безнадежно даже ставить. Например, для современных вычислительных машин вполне посильна такая задача, как решение системы, состоящей из нескольких сотен уравнений первой степени с таким же количеством неизвестных. Вычислитель, вооруженный карандашом и бумагой или арифмометром, не справился бы с такой задачей и за всю свою жизнь.

Когда в популярной литературе упоминают о вычислительных машинах, то часто при этом употребляют такие выражения, как «машина, решающая сложные уравнения», «машина, играющая в шахматы» или «машина — переводчик с одного языка на другой». При этом может создаться неправильное впечатление, что каждая такая функция — решение уравнений, игра в шахматы, перевод и т. п. — выполняется некоторой специальной машиной, сконструированной именно для этой цели. На самом деле для решения разнообразных задач, как математических (решение уравнений, составление таблиц логарифмов и т. п.), так и нематематических (например, перевод текста или игра в шахматы), могут быть использованы одни и те же устройства, так называемые универсальные вычислительные машины. Собственно говоря, каждая такая машина может выполнять лишь некоторое, довольно ограниченное, количество различных элементарных операций: складывать и перемножать числа, хранить полученные результаты в специальном устройстве — «памяти» машины, сравнивать числа между собой, выбирая, скажем, из двух или нескольких чисел наибольшее или наименьшее, и т. п. Однако решение самых разнообразных и сложных задач может быть сведено к последовательности (возможно, очень длинной) таких элементарных операций. Сама эта последовательность операций определяется программой, составляемой для каждой определенной задачи математиком-программистом. Таким образом, разнообразие задач, которые может решать универсальная вычислительная машина, есть разнообразие задаваемых этой машине программ.

Итак, в принципе универсальная вычислительная машина — это устройство, которое может с необычайной быстротой выполнять над числами арифметические операции: сложение, умножение, вычитание и деление, а также некоторые другие операции, например сравнение чисел и т. п.; при этом какие именно операции выполняются и в каком порядке — это определяется программой.

Производим ли мы вычисления вручную или же с помощью вычислительной машины, все равно нам нужно пользоваться какой-то формой записи тех чисел, с которыми мы оперируем, т. е. пользоваться какой-то системой счисления. Действуя с помощью карандаша и бумаги, мы, конечно, применим привычную нам десятичную систему. Однако для электронной вычислительной машины десятичная система мало пригодна. Такая машина отдает решительное предпочтение двоичной системе. Причины этого мы сейчас постараемся выяснить.

§ 13. ПОЧЕМУ ЭЛЕКТРОННАЯ МАШИНА «ПРЕДПОЧИТАЕТ» ДВОИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

Если мы производим вычисления вручную, то числа при этом пишутся карандашом или чернилами на бумаге. Для машины, однако, нужен какой-то иной способ фиксации тех чисел, с которыми она оперирует.

Чтобы выяснить суть дела, рассмотрим сначала не вычислительную машину, а устройство несравненно более простое — обыкновенный счетчик (электрический, газовый, счетчик такси и т. п.). Всякий такой счетчик состоит из нескольких колесиков, каждое из которых может находиться в одном из 10 положений, отвечающих цифрам от 0 до 9. Ясно при этом, что устройство, состоящее из k таких колесиков, может служить для фиксации 10^k различных чисел от 0 до $\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{раз}}$. Такой счетчик можно было бы использовать как своего рода счеты, т. е. применять его не только для фиксации чисел, но и для выполнения арифметических операций.

Если бы мы хотели иметь счетчик, приспособленный не к десятичной системе, а к системе с каким-то другим основанием p, то такой счетчик следовало бы составлять из колесиков, каждое из которых имеет не 10, а p различных положений. В частности, устройство, с помощью которого можно было бы фиксировать числа, записанные в двоичной системе, должно содержать элементы, каждый из которых имеет два возможных состояния. Само собой разумеется, что для устройства счетчика (основанного на какой-то системе счисления) нет необходимости пользоваться именно колесиками. В принципе можно сделать счетчик из каких угодно элементов, важно лишь, чтобы каждый из этих элементов имел столько устойчивых состояний, сколько единиц содержит выбранное нами основание системы счисления.

Счетчик, представляющий собой систему колесиков или какое-либо иное механическое устройство, может менять свое состояние лишь сравнительно медленно. Те скорости, с которыми работают современные вычислительные машины — десятки и сотни тысяч операций в секунду, оказались доступны потому, что в этих машинах работают не механические, а электронные устройства. Такие устройства практически лишены инерции, и поэтому они могут менять свое состояние за промежутки времени порядка миллионной доли секунды.

Для радиоэлектронных элементов (радиоламп, полупроводниковых элементов), которые в основном используются в вычислительных машинах, характерно наличие двух устойчивых состояний. Например, электронная лампа может быть «отперта» (тогда через нее идет ток) или «заперта» (ток через нее не проходит). По тому же принципу «да» или «нет» работают и полупроводниковые элементы, которые сейчас уже полностью вытеснили радиолампы из вычислительной техники. Эти свойства радиоэлектронных элементов и служат основной причиной того, что именно двоичная система оказалась наиболее удобной для вычислительных машин.

Исходные данные для решения той или иной задачи даются обычно в общепринятой десятичной системе. Поэтому, чтобы машина, основанная на двоичной системе, могла обрабатывать эти данные, они должны быть переведены на «понятный» арифметическому устройству машины язык двоичного кода. Такой перевод легко, конечно, осуществлять и автоматически. Результаты же машинного счета желательно иметь записанными снова в десятичной системе. Поэтому обычно в вычислительной машине бывает предусмотрен автоматический перевод результатов, полученных в двоичной системе, в десятичную систему.

Часто, главным образом в качестве промежуточной формы записи, в вычислительных машинах применяется и смешанная двоично-десятичная система. Она состоит в том, что число записывается сначала с помощью обычной десятичной системы, а затем каждая из входящих в него цифр представляется с помощью нулей и единиц в двоичной системе.

Таким образом, в двоично-десятичной системе каждое число записывается в виде нескольких групп, составленных из нулей и единиц. Например, число

$$2593$$

в двоично-десятичной системе записывается так:

0010 0101 1001 0011.

Для сравнения приведем двоичную запись этого же числа:

10100010001.

Посмотрим, как в вычислительной машине, основанной на двоичной системе счисления, реализуются арифметические операции. Основная операция, которую следует рассмотреть, — это операция сложения, так как умножение сводится к многократному сложению, а вычитание сводится к прибавлению отрицательных чисел и, наконец, деление сводится к повторному вычитанию. В свою очередь сложение многоразрядных чисел сводится к выполнению соответствующих действий поразрядно.

Сложение двух двоичных чисел в каждом разряде может быть описано так*). Пусть a — цифра, стоящая в данном разряде в первом слагаемом, b — цифра, стоящая в том же разряде во втором слагаемом, и c — цифра, которую нужно перенести из предыдущего разряда (где, как мы считаем, сложение уже выполнено). Произвести сложение в данном разряде — это значит указать, какая цифра должна быть записана в этом разряде в сумме и что нужно перенести в следующий разряд. Обозначим цифру, которая должна быть записана в данном разряде суммы, буквой s, а ту величину, которую нужно перенести в следующий разряд, обозначим буквой t. Так как каждая из величин a, b, c, s и t может принимать только значение 0 и 1, то все возможные здесь варианты содержатся в следующей таблице:

a	0	1	0	0	1	1	0	1
b	0	0	1	0	1	0	1	1
c	0	0	0	1	0	1	1	1
s	0	1	1	1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	1	1	1	1

*) Сейчас речь идет об обычном «арифметическом» сложении, а не о том поразрядном сложении, которое упоминалось в § 11 в связи с задачей шифровки текста. Впрочем, и поразрядное сложение также играет существенную роль в работе вычислительной машины.

Таким образом, чтобы вычислительная машина могла сложить два числа, записанных в двоичной системе, в ней для каждого разряда должно существовать устройство, имеющее три входа, отвечающих величинам a, b и c, и два выхода, отвечающих величинам s и t. Будем предполагать, как это обычно бывает в электронных устройствах, что единица означает наличие тока на данном входе или выходе, а нуль — его отсутствие. Рассматриваемое устройство, называемое **одноразрядным сумматором**, должно работать в соответствии с указанной выше таблицей, т. е. так, что если ни на один из трех входов не подается ток, то его не должно быть ни на одном из выходов; если подается ток на a, но не подается на b и c, то должен быть ток на s и отсутствие тока на t, и т. д. Устройство, работающее по такой схеме, нетрудно сконструировать из полупроводниковых элементов.

§ 14. ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ТРОИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Для оценки пригодности той или иной системы счисления в качестве основы для конструирования вычислительной машины имеет значение, кроме простоты осуществления арифметических операций в ней, также и то, что обычно называют экономичностью системы. Под этим понимается тот запас чисел, которые можно записать в данной системе с помощью определенного количества знаков.

Поясним это на примере. Чтобы в десятичной системе записать 1000 чисел (от 0 до 999), необходимо 30 знаков (по 10 цифр для каждого разряда). А в двоичной системе можно с помощью 30 знаков записать 2^{15} различных чисел (так как для каждого двоичного разряда нужны только две цифры 0 и 1, то с помощью 30 цифр мы можем записывать числа, содержащие до 15 двоичных разрядов). Но

$$2^{15} > 1000,$$

поэтому, имея 15 двоичных разрядов, можно записать больше различных чисел, чем с помощью трех десятичных.

Таким образом, двоичная система более экономична, чем десятичная.

Но какая из систем счисления самая экономичная? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующую конкретную задачу. Пусть в нашем распоряжении имеется 60 знаков. Мы можем, разбив их на 30 групп по 2 элемента в каждой, записать с их помощью в двоичной системе любое число, имеющее не больше 30 двоичных разрядов, т. е. в общей сложности 2^{30} чисел. Те же 60 знаков мы можем разбить на 20 групп по 3 элемента и, пользуясь троичной системой, записать 3^{20} различных чисел. Далее, разбив 60 знаков на 15 групп по 4 элемента в каждой, можно применить четверичную систему и записать 4^{15} чисел и т. д. В частности, воспользовавшись десятичной системой (т. е. разбив все знаки на 6 групп по 10 элементов в каждой), мы могли бы записать 10^6 чисел, а применив шестидесятеричную (вавилонскую) систему, можно было бы с помощью 60 знаков записать только 60 чисел. Посмотрим, какая из возможных здесь систем самая экономичная, т. е. позволяет записать с помощью данных 60 знаков наибольшее количество чисел. Иными словами, речь идет о том, какое из чисел

$$2^{30},\ 3^{20},\ 4^{15},\ 5^{12},\ 6^{10},\ 10^{6},\ 12^{5},\ 15^{4},\ 20^{3},\ 30^{2},\ 60$$

наибольшее. Легко проверить, что наибольшим здесь будет число 3^{20}. Действительно, покажем сначала, что

$$2^{30} < 3^{20}.$$

Так как $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$, а $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, то наше неравенство можно переписать в виде

$$8^{10} < 9^{10}.$$

Но в такой форме оно очевидно.

Далее,

$$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}.$$

Следовательно, в силу уже доказанного

$$3^{20} > 4^{15}.$$

Точно так же легко проверить и справедливость следующей цепочки неравенств:

$$4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^{6} > 12^{5} > 15^{4} > 20^{3} > 30^{2} > 60.$$

Таким образом, троичная система оказалась самой экономичной. Двоичная и равносильная ей, в смысле экономичности, четверичная системы несколько уступают в этом отношении троичной, но превосходят все остальные возможные системы.

Этот вывод никак не связан с тем, что рассматривалось именно 60 знаков. Мы привели этот пример только потому, что 60 знаков удобно разбивать на группы по 2, 3, 4 и т. д. знаков.

В общем случае, если взять n знаков, а за основание системы счисления принять некоторое число x, то получится $\frac{n}{x}$ разрядов, и количество чисел, которые при этом можно записать, будет равно

$$x^{\frac{n}{x}}.$$

Рассмотрим это выражение как функцию переменной x, принимающей не только целые, но и любые (дробные, иррациональные) положительные значения. Можно найти то значение переменной x, при котором эта функция достигает максимума. Оно равно e — иррациональному числу, представляющему собой основание так называемой натуральной системы логарифмов и играющему важную роль в самых разных вопросах высшей математики *). Число e приближенно равно

$$2{,}718281828459045\ldots$$

---

*) Для читателя, знакомого с элементами дифференциального исчисления, приведем соответствующую выкладку. Необходимое условие того, что в данной точке x_0 функция $y(x)$ достигает максимума, состоит в обращении в нуль ее производной в этой точке. В данном случае $y(x) = x^{n/x}$. Производная этой функции равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n}{x^2} x^{\frac{n}{x}} \ln x + \frac{n}{x} x^{\frac{n}{x}-1} = n x^{\frac{n}{x}-2} (1 - \ln x).$$

Приравняв ее нулю, получим, что

$$\ln x = 1, \text{ т. е. } x = e.$$

Так как слева от точки $x = e$ производная $\frac{dy}{dx}$ положительна, а справа отрицательна, то, в силу известных теорем дифференциального исчисления, в этой точке наша функция действительно имеет максимум.

Ближайшее к e целое число есть 3. Оно и служит основанием наиболее экономичной системы счисления.

График функции

$$y = x^{\frac{n}{x}}$$

изображен на рис. 4. (При этом, однако, по осям x и y взяты различные масштабы.)

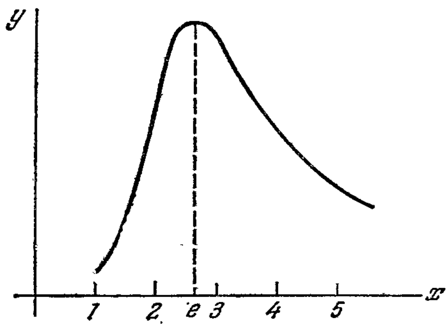

Рис. 4

Экономичность системы счисления — немаловажное обстоятельство с точки зрения ее использования в вычислительной машине. Поэтому, хотя применение в вычислительной машине троичной системы вместо двоичной влечет некоторые конструктивные трудности (при этом нужно пользоваться элементами, каждый из которых может находиться не в двух, а в трех устойчивых состояниях), эта система уже была использована в некоторых реально существующих вычислительных устройствах.

§ 15. О БЕСКОНЕЧНЫХ ДРОБЯХ

До сих пор мы говорили о целых числах. От десятичной записи целых чисел естественно перейти к десятичным дробям. Для этого нужно наряду с неотрицательными степенями числа 10 (т. е. 1, 10, 100 и т. д.) рассматривать и его отрицательные степени (10^{-1}, 10^{-2} и т. д.) и составлять комбинации, в которых участвуют как те, так и другие. Например, выражение

$$23{,}581$$

означает, как известно,

$$2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

и т. п.

Различные числа удобно изображать точками на прямой. Возьмем некоторую прямую и выберем на ней определенную точку O (начало отсчета), положительное направление (вправо) и единицу масштаба — отрезок OA (рис. 5). Будем считать, что точка O изображает число

Рис. 5

нуль, а точка A — единицу. Отложив от точки O вправо отрезок OA два, три и т. д. раз, мы получим точки, отвечающие числам два, три и т. д. Таким образом можно изобразить на прямой все целые числа. Для изображения дробных чисел, содержащих десятые, сотые и т. д., нужно делить отрезок OA на десять, сто и т. д. частей и пользоваться этими более мелкими единицами длины. Мы можем, таким образом, отметить на прямой точки, отвечающие всевозможным числам вида

$$a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 \ldots b_n,$$

т. е. всевозможным десятичным дробям. При этом мы, конечно, не займем всех точек, имеющихся на прямой. Например, если на прямой отложить от точки O отрезок, представляющий собой диагональ квадрата со стороной единица, то конец этого отрезка не попадет в число точек, отвечающих какой-либо десятичной дроби, поскольку сторона квадрата и его диагональ несоизмеримы.

Если мы хотим каждой точке прямой поставить в соответствие некоторую дробь, то для этого нам придется прибегнуть уже не к конечным, а к бесконечным десятичным дробям. Поясним смысл этого последнего утверждения.

Чтобы каждой точке прямой поставить в соответствие некоторую (бесконечную) десятичную дробь, поступим следующим образом. Будем для удобства говорить не о всей прямой, а об определенной ее части, именно об отрезке OA, принятом нами за единицу масштаба. Пусть

x — некоторая точка этого отрезка. Разделим OA на 10 равных частей и занумеруем эти части цифрами от 0 до 9. Обозначим b_1 номер того частичного отрезка, на котором находится точка x. Разделим теперь этот маленький отрезок снова на 10 частей, перенумеруем полученные части цифрами от 0 до 9 и обозначим b_2 номер того из этих маленьких отрезков, на котором находится точка x. Отрезок с номером b_2 снова разделим на 10 частей и, повторив всю процедуру, получим b_3. Будем продолжать этот процесс неограниченно, деля на каждом шаге отрезок, полученный на предыдущем шаге, на 10 частей. В результате этого мы получим последовательность цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, которую мы будем писать в виде

$$0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

и называть **бесконечной десятичной дробью**, отвечающей точке x. Оборвав эту дробь на некотором месте, мы получим обычную (конечную) десятичную дробь $0, b_1 b_2 \ldots b_n$, определяющую положение точки x на прямой не точно, а приближенно (именно, с точностью до $\frac{1}{10^n}$-й доли основного отрезка, если бесконечную дробь оборвать на n-й цифре).

Итак, мы поставили в соответствие каждой точке прямой некоторую бесконечную десятичную дробь. Нетрудно заметить, что при этом неизбежно возникает некоторая неопределенность. Именно, разделив отрезок OA на 10 частей, рассмотрим, например, точку, граничную между первой и второй частями. Мы можем отнести ее как к первой части (имеющей номер 0), так и ко второй (имеющей номер 1). В первом случае мы, продолжая процесс последовательного деления, будем обнаруживать выбранную точку в самой правой (т. е. имеющей номер 9) из тех частей, на которые делится отрезок, полученный на предыдущем шаге, т. е. получим бесконечную дробь

$$0{,}0999\ldots,$$

а во втором случае эта точка будет при каждом из последующих делений попадать на ту часть, которая имеет номер 0, т. е. получается дробь

$$0{,}1000\ldots$$

Таким образом, мы получили две бесконечные дроби, отвечающие одной и той же точке.

То же самое будет иметь место и для любой другой точки, которая окажется пограничной (между двумя отрезками) при каком-либо из последовательных разбиений. Например, дроби

$$0{,}125000\ldots \text{ и } 0{,}124999\ldots$$

изображаются на прямой одной и той же точкой.

Этой неопределенности можно избежать, условившись относить всякую пограничную точку или всегда к правому, или всегда к левому из содержащих ее частичных отрезков. Иначе говоря, мы можем изгнать или все дроби, содержащие «бесконечный хвост» из одних нулей, или все дроби, содержащие «бесконечный хвост» из одних девяток.

Введя такое ограничение, можно каждой точке отрезка x поставить в соответствие одну-единственную вполне определенную бесконечную десятичную дробь, причем двум разным точкам будут соответствовать две различные дроби.

То обстоятельство, что мы, желая зафиксировать положение точки на отрезке с помощью последовательных его подразделений, каждый раз делили соответствующий отрезок именно на 10 частей, конечно, несущественно. Это объяснялось просто нашей традиционной приверженностью к десятичной системе. Можно было бы взять вместо десяти какое-нибудь другое число, например двойку, т. е. делить каждый раз отрезок пополам, приписывая одной из этих половин номер 0, а другой — номер 1, и выбирать затем ту половину, которой принадлежит рассматриваемая точка. При этом мы каждой точке поставили бы в соответствие последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, состоящую только из нулей и единиц, которую естественно писать в виде

$$(0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots)_2$$

и называть **бесконечной двоичной дробью**. Оборвав эту последовательность на каком-либо месте, мы получим конечную двоичную дробь

$$(0, b_1 b_2 \ldots b_n)_2,$$

т. е. число

$$b_1 \cdot \frac{1}{2} + b_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + b_n \cdot \frac{1}{2^n},$$

определяющее положение рассматриваемой точки с точностью до $\frac{1}{2^n}$-й части основного отрезка.

Бесконечные десятичные дроби, с помощью которых можно изобразить все точки прямой, представляют собой удобный аппарат для построения теории действительных чисел, служащей фундаментом для многих разделов высшей математики. С тем же самым успехом можно при этом пользоваться не десятичными, а какими-либо иными (например, двоичными, троичными т. п.) бесконечными дробями.

В заключение рассмотрим следующую поучительную задачу.

Возьмем снова отрезок OA, разделим его на три равные части и выбросим среднюю часть (считая, что сами точки деления относятся к этой средней части, т. е. тоже

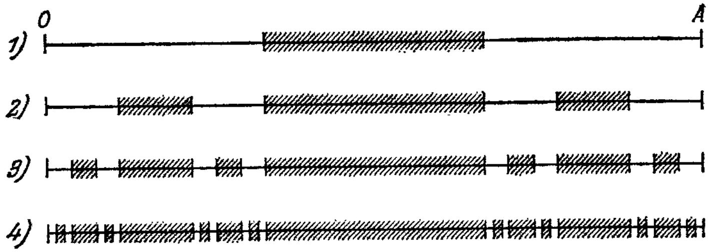

Рис. 6

выбрасываются; рис. 6). Далее, каждую из двух оставшихся частей опять разделим на три равные части и средние части выбросим. После этого останутся четыре маленьких кусочка, в каждом из которых мы снова выбросим среднюю треть. Будем повторять этот процесс неограниченно. Спрашивается, сколько точек отрезка OA останутся при этом невыброшенными?

На первый взгляд может показаться, что в результате такой «чистки» останутся только крайние точки O и A. Это заключение подтверждается, казалось бы, следующим рассуждением. Подсчитаем сумму длин всех отрезков, выбрасываемых при описанном выше процессе. (Напомним, что длина всего отрезка OA принимается равной 1.) На первом шаге мы выбрасываем один отрезок длины $\frac{1}{3}$, на втором шаге — два отрезка по $\frac{1}{9}$ каждый, на третьем — четыре отрезка по $\frac{1}{27}$ каждый и и т. д. Сумма длин всех выбрасываемых отрезков равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$$

Это — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом $\frac{1}{3}$ и знаменателем $\frac{2}{3}$. По известной формуле ее сумма равна

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Итак, сумма длин выброшенных отрезков в точности равна длине исходного отрезка OA!

И все же описанный выше процесс оставляет на отрезке невыброшенными, кроме точек O и A, еще бесконечно много точек. Чтобы убедиться в этом, сделаем следующее.

Представим каждую точку единичного отрезка OA с помощью бесконечной дроби, записанной по троичной системе. Каждая такая дробь будет состоять из нулей, единиц и двоек. Я утверждаю: при описанном выше процессе «выбрасывания середин» останутся те точки, которым отвечают троичные дроби, не содержащие ни одной единицы (т. е. состоящие целиком из нулей и двоек). Действительно, на первом шаге мы выбросили среднюю треть единичного отрезка, т. е. те точки, которым отвечают троичные дроби, имеющие на первом месте единицу. На втором этапе мы в каждой из оставшихся частей снова выбрасываем среднюю треть, т. е. изгоняем дроби, у которых на втором месте стоит единица, и т. д. (При этом мы выбрасываем и такие точки, которые представляются двумя троичными дробями, если хоть одна из этих дробей содержит единицу. Например, конец первой трети отрезка OA, т. е. число $\frac{1}{3}$, можно представить троичной дробью

$$0{,}1000\ldots$$

или

$$0{,}0222\ldots;$$

эту точку мы выбросили.)

Итак, описанный процесс оставляет на отрезке OA те точки, которым отвечают троичные дроби, состоящие только из нулей и двоек. Но ведь таких дробей бесконечно много! Следовательно, кроме концевых точек, на отрезке OA останутся не выброшенными еще бесконечно много точек. Например, останется точка, отвечающая дроби

$$0{,}020202\ldots,$$

которая представляет собой троичное разложение числа $\frac{1}{4}$. В самом деле, бесконечная троичная дробь $0{,}020202\ldots$ — это не что иное, как сумма геометрической прогрессии

$$2\cdot 3^{-2}+2\cdot 3^{-4}+2\cdot 3^{-6}+\ldots,$$

а по уже упоминавшейся выше формуле эта сумма равна

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{4}.$$

В том, что точка $\frac{1}{4}$ не будет выброшена, можно убедиться и при помощи следующего наглядно-геометрического рассуждения. Эта точка делит весь отрезок $[0, 1]$ в отношении $1:3$. После выбрасывания отрезка $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ точка $\frac{1}{4}$ остается на полуинтервале $\left[0, \frac{1}{3}\right)$, который она делит в отношении $3:1$. После второго выбрасывания она остается на интервале $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$, который она делит в отношении $3:1$, и т. д. Ни на каком шаге точка $\frac{1}{4}$ не будет выброшена.

Итак, оказывается, описанный выше процесс «выбрасывания середин» приводит к совокупности точек, которая, хотя и «совсем не занимает места» на отрезке (поскольку сумма длин выброшенных отрезков равна, как мы выяснили, единице), но в то же время содержит бесконечно много точек.

Эта совокупность точек обладает и другими интересными свойствами, однако их изучение потребовало бы от нас изложения сведений и понятий, выходящих за рамки нашей маленькой книжки, которую мы на этом заканчиваем.

Сергей Васильевич Фомин

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Серия «Популярные лекции по математике»,
выпуск 40

Редактор *В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 32464

Сдано в набор 22.09.86. Подписано к печати 28.01.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 2,52. Усл. кр.-отт. 2,73. Уч.-изд. л. 2,14. Тираж 127 000 экз. Заказ № 336. Цена 5 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

5 коп.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Беран.** Упорядоченные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программирования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.
Вып. 58. **Ю. А. Шашкин.** Эйлерова характеристика.
Вып. 59. **Л. А. Скорняков.** Системы линейных уравнений.